

Rotierende Flüssigkeitsringe in Newtonscher und Einsteinscher Gravitationstheorie

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomischen
Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Diplom-Physiker Stefan Horatschek
geboren am 7. Januar 1980 in Jena

Gutachter

1. Prof. Dr. Reinhard Meinel (Jena)
2. Prof. Dr. Hubert Goenner (Göttingen)
3. Prof. Dr. Wilhelm Kley (Tübingen)

Tag des Rigorosums: 14.1.2010

Tag der öffentlichen Verteidigung: 26.1.2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1 Newtonsche Ringe	1
1.1 Selbstgravitierende Ringe	1
1.1.1 Einleitung	1
1.1.2 Das iterative Näherungsverfahren	2
1.1.3 Allgemeine Resultate für dünne Ringe	11
1.1.4 Homogene Ringe	13
1.1.5 Polytrope Ringe	27
1.1.6 Der Grenzfall unendlichen Polytropenindex	46
1.1.7 Abschließende Bemerkungen	49
1.2 Ein Roche-Modell für Ringe	50
1.2.1 Einleitung	50
1.2.2 Das Roche-Modell mit einer ringförmigen Quelle	50
1.2.3 Vergleich mit dem vollen Problem	56
2 Relativistische Ringe	61
2.1 Einleitung	61
2.2 Grundgleichungen	63
2.2.1 Linienelement	63
2.2.2 Fernfeld	65
2.2.3 Starre Rotation	65
2.2.4 Ergosphären	66
2.2.5 Energie-Impuls-Tensor	66
2.2.6 Ausgewählte Zustandsgleichungen	68
2.2.7 Feldgleichungen	69
2.2.8 Physikalische Größen	71
2.3 Numerische Ergebnisse	72
2.4 Post-Newtonsche Ringe	73
2.4.1 Ansatz für die post-Newtonsche Entwicklung	73
2.4.2 Newtonsche Ordnung	75
2.4.3 Erste post-Newtonsche Ordnung	77
2.4.4 Zur Bindungsenergie	78
2.4.5 Ansatz und Lösungsmethode	81
2.4.6 Lösung der ersten post-Newtonschen Ordnung	84
2.4.7 Diskussion der post-Newtonschen Ergebnisse	88
Zusammenfassung und Ausblick	95

Literaturverzeichnis	99
A Landau-Symbole	103
B Koeffizienten für homogene Ringe	105
C Hypergeometrische Funktion und Bessel-Funktion	109
D Lane-Emden-Gleichung für statische Kugeln	111
E Roche-Modell für sphäroidale Konfigurationen	113
F Lokal nichtrotierender Beobachter	117
G Bindungsenergie	119
H Toroidalkoordinaten	125
I Verallgemeinerte Laplace-Gleichung in Toroidalkoordinaten	129
J Physikalische Größen in post-Newtonscher Näherung	133
Eigene Publikationen und Vorträge	137
Ehrenwörtliche Erklärung	139
Danksagung	141
Lebenslauf	143

Einleitung

Die Newtonsche Mechanik und das Gravitationsgesetz bilden zusammen die erste und somit vielleicht bedeutendste physikalische Theorie überhaupt. Sie beschreibt die Bewegung der Wandelsterne (Planeten) mit den gleichen „irdischen Gesetzen“ wie den freien Fall eines Apfels. Die Newtonsche Theorie ist uns Physikern so sehr ins Blut übergegangen, dass wir auch heute im Zeitalter der Quantenphysik und Relativitätstheorie häufig mit Newtonschen Vorstellungen arbeiten: So sprechen wir auch heute von den Teilchenbahnen im Beschleuniger oder den Zentrifugalkräften im Neutronenstern.

Seit es diese Theorie gibt, wird sie auf Himmelskörper angewandt. So schätzte schon Newton (unter der Näherung konstanter Massendichte) die Abflachung der Erde zu

$$1 - \frac{R_p}{R_{\text{ä}}} \approx \frac{5\Omega^2 R^3}{4GM}$$

ab. Dabei sind $R_{\text{ä}}$, R_p und R der äquatoriale, der polare und der mittlere Radius, M die Masse und Ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde. G ist die Gravitationskonstante.¹ Das Resultat dieser Rechnung lautet $1 - R_p/R_{\text{ä}} \approx 1/230$ und passt gut zum wahren Wert $1/294$, vor allem wenn man bedenkt, dass es damals eine Kontroverse darüber gab, ob die Erde abgeflacht (oblat) oder prolat ist. Im prolaten Fall wäre $1 - R_p/R_{\text{ä}}$ negativ! Einen wichtigen Beitrag brachte Maclaurin, der unter anderem den Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit und der Exzentrizität starr rotierender, homogener, axialsymmetrischer Ellipsoide fand, und damit Newtons Formel verallgemeinerte, die nur für kleine Abweichungen von der Kugel gilt. Ihm zu Ehren werden die zugehörigen Gleichgewichtsfiguren auch heute noch Maclaurin-Ellipsoide genannt.

Seitdem ist das Problem rotierender Gleichgewichtsfiguren eine Herausforderung für die Mathematiker und Physiker: Jacobi, Dedekind, Riemann, Kowalewsky, Poincaré und viele andere bedeutende Wissenschaftler haben sich mit diesem Problem beschäftigt. Mathematisch betrachtet, handelt es sich um ein freies Randwertproblem. Es müssen im Inneren und Äußeren der Flüssigkeit partielle Differentialgleichungen gelöst werden, und auf der am Anfang unbekannten Oberfläche müssen gewisse Übergangs-

¹Man beachte, dass die damals (vor Cavendish) unbekannten Werte von G und M nicht benötigt werden. Es genügt, die Fallbeschleunigung $g = GM/R^2$ zu kennen.

bedingungen erfüllt sein.

Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie ist das Problem noch viel schwieriger. Nachdem Einstein „seine“ Feldgleichungen gefunden hatte, ging er zunächst davon aus, dass es völlig hoffnungslos sei, strenge Lösungen für sie zu suchen. Jedoch gelang es Schwarzschild schnell, den einfachen Fall einer statischen, homogenen Kugel zu lösen. Für das zugehörige zylindersymmetrische Problem wurde übrigens noch keine Lösung gefunden, was eine gewisse Rolle in dieser Arbeit spielt.

Eine strenge relativistische Lösung, die sich im Newtonschen Grenzfall auf „echte“ Maclaurin-Ellipsoide reduziert, ist bis heute nicht gefunden worden. Im Grenzfall der nichtrotierenden Kugel gelang dies durch die Schwarzschild-Lösung. Aber auch für das andere Ende der Maclaurin-Sequenz, d.h. für die Maclaurin-Scheibe, konnte die relativistische Verallgemeinerung gefunden werden. Mithilfe der „Inversen Streumethode“ gelang es Neugebauer und Meinel [60], das Randwertproblem für eine starr rotierende, relativistische Staubscheibe streng zu lösen.

Weniger bekannt als die sphäroidale Gleichgewichtsfiguren sind die toroidalen. Solche Flüssigkeitsringe (mit und ohne Zentralkörper) wurden in der Newtonschen Theorie von Kowalewsky [43], Poincaré [71, 72, 73], Dyson [22, 23] und Ostriker [63] mit analytischen Methoden näherungsweise untersucht. Dabei wurden die Ringe stets mithilfe einer Entwicklung im Grenzfall dünner Ringe behandelt – ganz analog zu Newtons Formel, wo um die statische, kugelsymmetrische Lösung entwickelt wird. Unter dünnen Ringen versteht man hier nicht etwa flache scheibenförmige Ringe (Lochscheiben), wie sie beispielsweise von Kley [41, 42] behandelt wurden, sondern ausgedehnte Flüssigkeitsringe. Mit „dünn“ ist hier gemeint, dass der Radius des meridionalen Querschnitts klein ist verglichen mit dem Radius des Rings.

Numerisch wurden homogene Ringe erstmals von Wong [85] untersucht. Der von Bardeen [11] vermutete parametrische Übergang von sphäroidalen zu toroidalen Körpern, insbesondere die Verbindung der Dyson-Ringe mit den Maclaurin-Ellipsoiden, konnte mit verbesserten Methoden von Eriguchi, Sugimoto und Hachisu [26, 25] untersucht werden, siehe auch [33]. Bedeutend später konnten Ansorg, Kleinwächter und Meinel [7] die Ringsequenz und weitere von der Maclaurin-Sequenz abzweigende Sequenzen fast mit Maschinengenauigkeit berechnen. Damit war es möglich, die Bifurkationssequenzen ausgiebig zu studieren und einige fehlerhafte Resultate zu korrigieren. Mithilfe numerischer Methoden können auch nichthomogene [32] und relativistische Ringe [6] berechnet werden. Die relativistischen Ringe erlauben einen parametrischen Übergang zum maximal rotierenden Schwarzen Loch (extreme Kerr-Lösung). Ein solcher Übergang wurde zuvor schon für die Staubscheibe gefunden [60, 52, 13, 14].

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der analytischen Behandlung selbstgravitie-

render Ringe. Dabei wird die Entwicklung im Grenzfall dünner Ringe benutzt und für Newtonsche Ringe weiter getrieben, als dies bisher geschehen ist. Die gleichen Methoden werden darüber hinaus erstmals mit einer post-Newtonschen Entwicklung kombiniert. Dadurch ist man in der Lage, auch für relativistische Ringe approximative Ausdrücke anzugeben. Außerdem wird ein Roche-Modell für Newtonsche Ringe vorgestellt. Die verschiedenen Näherungslösungen werden mit genauen numerischen Werten verglichen.

Kurzfassung

Mithilfe verschiedener analytischer Näherungsverfahren werden axialsymmetrische, stationäre, starr rotierende Flüssigkeitsringe in Newtonscher und Einsteinscher Gravitationstheorie berechnet und mit sehr genauen numerischen Lösungen des vollen Problems – ein freies Randwertproblem partieller Differentialgleichungen – verglichen.

Ausgangspunkt für die Entwicklung eines iterativen Näherungsverfahrens ist der folgende Umstand: Je kleiner der Querschnitt eines Rings bei festgehaltener Ausdehnung des Rings wird, umso kreisförmiger ist er. Das Randwertproblem reduziert sich dabei auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Diese werden in einigen Fällen (konstante Massendichte, polytrope Zustandsgleichung mit Polytropenindex $n = 1$ und $n \rightarrow \infty$) analytisch gelöst, in anderen numerisch. Einige Resultate lassen sich ohne die Lösung der Differentialgleichungen herleiten, teilweise für beliebige Zustandsgleichung.

Mit der gleichen Methode werden relativistische, homogene Ringe in post-Newtonscher Näherung berechnet. Die dabei auftretenden gewöhnlichen Differentialgleichungen werden analytisch gelöst.

Außerdem werden Newtonsche Ringe im sogenannten Roche-Modell betrachtet. Dabei wird der Ring nicht als selbstgravitierende Flüssigkeit behandelt, sondern in einem geeigneten vorgegebenen Potential. Dies führt auf algebraische Gleichungen und liefert gute Näherungen für polytrope Ringe mit hohem Polytropenindex. Im Grenzfall dünner Ringe lassen sich die Gleichungen, selbst an der Massenabwurfsgrenze, analytisch lösen.

Notationen und Konventionen

In den folgenden Tabellen sind die wichtigsten verwendeten Größen², Operatoren und Konventionen aufgeführt. Viele Größen treten sowohl bei der Berechnung von Newtonschen Ringen als auch bei relativistischen Ringen auf. In der Tabelle sind dann zwei Verweise auf Formeln angegeben. An einigen Stellen treten im Kapitel 2, und auch im Anhang G, neben den relativistischen Größen die entsprechenden Newtonschen Größen auf, die dann zur Unterscheidung den Index „N“ erhalten. Die hochgestellten Indizes „i“ und „a“ geben an, ob sich eine Größe auf das Innere oder das Äußere des Rings bezieht. Der Index „Ob“ bedeutet, dass sich eine Größe auf die Oberfläche des Rings bezieht.

Naturkonstanten		
(Newtonsche) Gravitationskonstante	G	
Lichtgeschwindigkeit	c	
reduziertes Plancksches Wirkungsquantum	\hbar	
Neutronenmasse	m_n	
Operatoren und Symbole		
Nabla-Operator	$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$	
Laplace-Operator	$\Delta = \nabla^2$	
verallgemeinerter Laplace-Operator	Δ_m , siehe (2.33)	
partielle Ableitung eines Tensors A^{ab} nach x^i	$A^{ab}_{,i}$	
kovariante Ableitung eines Tensors A^{ab} nach x^i	$A^{ab}_{;i}$	
Landau-Symbole	o und O , siehe Anhang A	
Funktionen (siehe auch [75])		
\mathcal{W}	Lambertsche W-Funktion	(1.234)
P_l	Legendre-Polynom	(1.30)
P_l^m	zugeordnete Legendre-Funktion erster Gattung	(I.8)
Q_l^m	zugeordnete Legendre-Funktion zweiter Gattung	(I.8)
\mathcal{K}	vollständig elliptisches Integral erster Gattung	(1.33)
\mathcal{E}	vollständig elliptisches Integral zweiter Gattung	(1.70)
J_i	Bessel-Funktion (erster Gattung)	(1.150)
Y_i	Neumann-Funktion (Bessel-Funktion zweiter Gattung)	(1.150)
j_{ik}	k -te positive Nullstelle der Bessel-Funktion J_i	(1.152)
${}_pF_q$	hypergeometrische Funktion	(1.198)
Γ	Gamma-Funktion	(C.4)

²Ein paar wenige Größen mit untergeordneter Bedeutung sind nicht explizit aufgeführt.

Bezeichnung	Beschreibung	Formel
A	(Koordinaten-)Radienverhältnis des Rings	(1.16), (2.45)
a	Ausdehnung des Querschnitts	(1.17)
b	Lage des Massenschwerpunkts des Querschnitts	(1.3), (2.7)
E_b	Bindungsenergie	(2.43)
H	thermodynamische Größe	(2.21)
h	Druckfunktion	(1.11)
J	Drehimpuls	(1.42), (2.38)
K	Polytropenkonstante	(1.111), (2.25)
M	Newtonsche Masse bzw. Gravitationsmasse	(1.41), (2.38)
M_B	baryonische Masse	(2.42)
n	Polytropenindex	(1.111), (2.25)
P	Druckintegral	(1.43)
p	Druck	(1.8), (2.15)
q	Ordnung für die Entwicklung in σ	(1.17)
r	radiale Koordinate	(1.1)
T	kinetische Energie	(1.45)
U	Newtonsches Gravitationspotential	(1.5)
\mathcal{U}	innere Energie, Kompressionsenergie	(2.19), (G.11)
u	Dichte der inneren Energie	(2.18)
u^i	Vierergeschwindigkeit	(2.13)
V	„Rotationspotential“	(1.15)
v	Geschwindigkeit	(1.8), (2.14)
W	potentielle Energie	(1.44)
x	Betrag vom Ortsvektor	(1.9)
y	dimensionslose radiale Koordinate	(1.23)
Z_0	relative Rotverschiebung	(2.44)
z	Zylinderkoordinate	(1.1), (2.4)
α	Maß für die Winkelgeschwindigkeit	(1.225)
δ	Winkel bei Massenabwurfsgrenze	(1.223)
ε	Parameter der post-Newtonschen Entwicklung	(2.47)
η^i	Killing-Vektorfeld der Axialsymmetrie	(2.2)
κ	Maß für die Konzentration der Masse	(1.244)
Λ	logarithmischer Term in σ	(1.26)
λ	relativistisches Potential	(2.4)
μ	Massendichte	(1.4), (2.15)

μ_z	Massendichte am „Punkt“ $r = 0$	(1.19)
$\tilde{\mu}$	$\mu^{1/n}$	(1.116)
ν	relativistisches Potential	(2.4)
ξ^i	Killing-Vektorfeld der Stationarität	(2.1)
ϱ	Zylinderkoordinate	(1.1), (2.4)
ϱ_i, ϱ_a	Innen- und Außenradius des Rings	(1.16)
σ	Entwicklungsparameter im Grenzfall dünner Ringe	(1.18)
χ	Winkelkoordinate	(1.1), (2.6)
ψ	relativistisches Potential	(2.4)
Ω	Winkelgeschwindigkeit	(1.9), (2.12)
ω	relativistisches Potential	(2.4)

1 Newtonsche Ringe

1.1 Selbstgravitierende Ringe

1.1.1 Einleitung

Die analytische Behandlung selbstgravitierender Flüssigkeitsringe reicht bis ins 19. Jahrhundert zurück und zog das Interesse solch renommierter Wissenschaftler wie Kowalewsky [43], Poincaré [72, 73, 74] und Dyson [22, 23] auf sich. Sie alle behandelten axialsymmetrische, starr rotierende, homogene Ringe im Gleichgewicht näherungsweise mittels einer Entwicklung im Grenzfall dünner Ringe. Lichtenstein [48, 49] bewies später, dass Lösungen für ringförmige, homogene Gleichgewichtsfiguren tatsächlich existieren. Im Grenzfall dünner Ringe wird der meridionale Querschnitt¹ des Rings kreisförmig. Kowalewsky und Poincaré behandelten das Problem bis zur zweiten Ordnung und Dyson sogar bis zur vierten Ordnung im Parameter $\sigma = a/b$, wobei a ein Maß für die Breite des Querschnitts ist, genauer der Radius des (kreisförmigen) Querschnitts in führender Ordnung, und b der Abstand des Schwerpunkts des Querschnitts von der Rotationsachse. Ostriker zieht in [63] eine Parallele zwischen der Näherung für dünne Ringe und den Arbeiten [57, 16, 21]. Dort werden rotierende, sphäroidale, polytrope Konfigurationen ausgehend vom statischen, kugelsymmetrischen Fall in Störungsrechnung behandelt. Bei Ringen hingegen stellt ein statischer, unendlich langer Zylinder das ungestörte Problem dar.

Es lag die Vermutung nahe, dass die Entwicklung auch zu höheren Ordnungen weitergeführt werden kann. In der Tat konnte, wie später ausführlich dargestellt wird, ein Iterationsverfahren gefunden werden, mit welchem aus der Entwicklung zur Ordnung q die Entwicklung zur Ordnung $q + 1$ bestimmt werden kann. Damit ist es zumindest prinzipiell möglich, die Entwicklung zu beliebig hohen Ordnungen weiterzuführen. Für diese Arbeit wurde die Entwicklung bis zur 20. Ordnung mithilfe des Computeralgebra-Programms MapleTM (Waterloo Maple Inc.) berechnet.

Ein wichtiger Schritt für das Verständnis von Ringen mit anderen Zustandsgleichungen gelang Ostriker [62, 63, 64], der polytrope Ringe in erster Ordnung in σ untersuch-

¹Im Folgenden ist mit „Querschnitt“ stets der „meridionale Querschnitt“ gemeint.

te und dabei insbesondere den Grenzfall unendlichen Polytropenindex n („isothermer“ Grenzfall) betrachtete. Da „isotherme“ Ringe stets unendlich dünn sind, kann man diese Lösung zur ersten Ordnung auch als eine strenge Lösung des nicht genäherten Problems auffassen.

Auch für polytrope Ringe ließ sich das oben erwähnte Iterationsverfahren anwenden. Dabei war es zunächst notwendig, die Materieverteilung im Inneren des Rings zu bestimmen. Konkret wurde das Verfahren bis zur dritten Ordnung angewandt. Für den Polytropenindex $n = 1$ ließen sich sämtliche auftretenden Differentialgleichungen analytisch lösen, in anderen Fällen wurden die Gleichungen numerisch gelöst. Aber selbst ohne das Lösen der Differentialgleichungen lassen sich einige analytische Aussagen treffen, zum Teil sogar für beliebige Zustandsgleichung.

Die Güte der hier erzielten genäherten Ergebnisse lässt sich mit dem Vergleich zu genauen numerischen Lösungen des (nicht genäherten) Problems bestimmen. Die hier verwendeten numerischen Ergebnisse sind größtenteils mit einem spektralen Mehrgebietsverfahren (engl. *multi-domain spectral method*) berechnet worden. Dieses Verfahren ist in [4, 5] für relativistische Sterne beschrieben, jedoch auch auf Newtonsche Ringe (siehe [9] für weitere Informationen) anwendbar. Alternativ dazu wurden einige Kurven für Newtonsche, homogene Körper auch mit einem „eindimensionalen“² Verfahren, siehe [7], berechnet. Die Genauigkeit der numerischen Lösungen ist extrem gut: Die mithilfe der numerischen Werte gezeichneten Kurven geben die zugehörigen echten Kurven ununterscheidbar wieder, vom Grenzfall dünner Ringe bis zur Massenabwurfsgrenze bzw. dem Übergang zu sphäroidalen Körpern.

Viele Ergebnisse dieses Abschnitts sind in [69] veröffentlicht.

1.1.2 Das iterative Näherungsverfahren

Koordinaten

Um axialsymmetrische Ringe zu beschreiben, ist es nützlich, polarartige Koordinaten (r, χ, φ) mit $r \geq 0$ und $0 \leq \chi < 2\pi$ einzuführen, die mit Zylinderkoordinaten (ϱ, z, φ) wie folgt zusammenhängen:

$$\boxed{\varrho = b - r \cos \chi \quad \text{und} \quad z = r \sin \chi.} \quad (1.1)$$

Für ein gegebenes φ sind Linien mit konstantem r konzentrische Kreise um den Mittelpunkt ($\varrho = b, z = 0$). Die Koordinate χ misst den Winkel entlang solcher Kreise. Die

²Eine eindimensionale Funktion, die die Oberfläche und letztlich den gesamten Körper samt seiner Eigenschaften bestimmt, wird berechnet.

Abb. 1.1 stellt diese Koordinaten dar. Die Oberfläche des Rings wird im Folgenden mit-

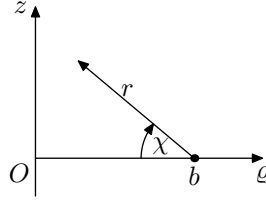


Abbildung 1.1: Darstellung der Koordinaten (r, χ) und deren Zusammenhang mit den Zylinderkoordinaten (ϱ, z) .

hilfe der Funktion $r_{\text{Ob}}(\chi)$ beschrieben. Angewandt auf axialsymmetrische Funktionen $f = f(r, \chi)$, ist der Laplace-Operator in diesen Koordinaten

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2} - (b - r \cos \chi)^{-1} \left(\cos \chi \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \chi}{r} \frac{\partial f}{\partial \chi} \right). \quad (1.2)$$

Der Wert von b ist noch nicht festgelegt und wird nun durch

$$b := \frac{\iint \mu \varrho \, d\varrho \, dz}{\iint \mu \, d\varrho \, dz} \quad (1.3)$$

definiert, wobei μ die Massendichte ist. Das bedeutet, dass der Schwerpunkt des Querschnitts mit dem „Punkt“³ $\varrho = b, z = 0$ bzw. $r = 0$ zusammenfällt. In den r - χ -Koordinaten lautet die *Schwerpunktsbedingung*

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{Ob}}(\chi)} \mu r^2 \cos \chi \, dr \, d\chi = 0.} \quad (1.4)$$

Grundgleichungen

Um das Problem einer selbstgravitierenden Flüssigkeit im Gleichgewicht zu lösen, ist im Äußeren der Flüssigkeit die Laplace-Gleichung

$$\boxed{\Delta U^{\text{a}} = 0} \quad (1.5)$$

und im Inneren die Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta U^{\text{i}} = 4\pi G \mu} \quad (1.6)$$

³ Nur im meridionalen Querschnitt erscheint $r = 0$ als Punkt. Tatsächlich ist es ein Kreis mit Radius b , der in der Äquatorebene liegt.

zu lösen, wobei U das Gravitationspotential, kurz Potential, und G die Gravitationskonstante ist. Die hochgestellten Indizes „a“ und „i“ geben hier und im Folgenden an, ob sich die indizierte Größe auf das Äußere oder das Innere des Rings bezieht. Auf der Oberfläche muss das Potential stetig und stetig differenzierbar sein:

$$\boxed{U_{\text{Ob}}^{\text{i}} = U_{\text{Ob}}^{\text{a}} =: U_{\text{Ob}} \quad \text{und} \quad \nabla U^{\text{i}}|_{\text{Ob}} = \nabla U^{\text{a}}|_{\text{Ob}}.} \quad (1.7)$$

Zusätzlich muss die Euler-Gleichung

$$\boxed{\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \nabla U^{\text{i}} - \nabla p} \quad (1.8)$$

erfüllt sein. Hierbei ist \vec{v} die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitselements und p der Druck. Für starre Rotation mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ um die Achse $\varrho = 0$ ist das Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{x} \quad \text{bzw.} \quad v = \Omega \varrho. \quad (1.9)$$

Damit lässt sich (1.8) als

$$\nabla \left(U^{\text{i}} + \int_0^p \frac{dp'}{\mu(p')} - \frac{1}{2} \Omega^2 \varrho^2 \right) = 0 \quad (1.10)$$

schreiben. Das auftretende Integral

$$\boxed{h := \int_0^p \frac{dp'}{\mu(p')}} \quad (1.11)$$

wird im Folgenden als *Druckfunktion* bezeichnet. Im Spezialfall konstanter spezifischer Entropie ist h nichts anderes als die spezifische Enthalpie. Integrieren von (1.10) führt auf die Bernoulli-Gleichung

$$\boxed{U^{\text{i}} + h - \frac{1}{2} \Omega^2 \varrho^2 = V_0} \quad (1.12)$$

mit V_0 als Integrationskonstante. Auf der Oberfläche verschwindet der Druck

$$p(r_{\text{Ob}}(\chi), \chi) = 0 \quad (1.13)$$

und somit auch die Druckfunktion h . Folglich gilt dort

$$U_{\text{Ob}} - \frac{1}{2}\Omega^2 \varrho^2 \Big|_{\text{Ob}} = V_0. \quad (1.14)$$

Manchmal ist es nützlich, das „*Rotationspotential*“

$$V := U - \frac{1}{2}\Omega^2 \varrho^2 \quad (1.15)$$

zu benutzen.

Reihenentwicklung

Geht das Verhältnis

$$\boxed{A := \frac{\varrho_i}{\varrho_a}} \quad (1.16)$$

vom Innenradius ϱ_i zum Außenradius ϱ_a gegen 1, so spricht man vom *Grenzfall dünner Ringe*. In diesem Grenzfall wird der Querschnitt des Rings kreisförmig⁴. Diese Annahme wird im Nachhinein dadurch bestätigt, dass alle Gleichungen zu beliebiger Ordnung konsistent gelöst werden können. Außerdem bestätigen numerische Ergebnisse, dass der Querschnitt im Grenzfall dünner Ringe kreisförmig wird. Dies ist der Ausgangspunkt des Entwicklungsschemas. Nebenbei bemerkt, kann der Querschnitt eines Rings um einen Zentralkörper, beispielsweise um einen Massenpunkt, deutlich von einem Kreis abweichen, selbst wenn das Radienverhältnis nahe bei 1 liegt (siehe Abb. 8 in [9]).

Für die Oberflächenfunktion kann man die Reihe⁵

$$r_{\text{Ob}}(\chi) = a \left(1 + \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^q) \right) \quad (1.17)$$

ansetzen, wobei

$$\boxed{\sigma := \frac{a}{b}} \quad (1.18)$$

der Entwicklungsparameter des Näherungsverfahrens ist und q die Entwicklungsordnung. Da selbstgravitierende Flüssigkeiten im Gleichgewicht stets reflexionssymme-

⁴Die einzige bekannte Ausnahme bilden unendlich dünne Ringe im Roche-Modell (siehe Kapitel 1.2 und insbesondere Abb. 1.16), die vermutlich als „isotherme“ Ringe, d. h. als Grenzfall polytroper Ringe mit unendlichem Polytropenindex, interpretiert werden können.

⁵Die Bedeutung des Landau-Symbols o ist im Anhang A erklärt.

trisch bezüglich der Äquatorebene sind, siehe etwa [49], treten in (1.17) keine Sinus-Terme auf. Dieser Ansatz sichert, dass der Querschnitt in führender Ordnung tatsächlich ein Kreis vom Radius a ist. In ähnlicher Weise setzt man für die Massendichte, die Druckfunktion, den Druck und das Gravitationspotential im Inneren des Rings

$$\mu(r, \chi) = \mu_z \left(\sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i \mu_{ik}(y) \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^q) \right), \quad (1.19)$$

$$h(r, \chi) = \pi G \mu_z a^2 \left(\sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i h_{ik}(y) \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^q) \right), \quad (1.20)$$

$$p(r, \chi) = \pi G \mu_z^2 a^2 \left(\sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i p_{ik}(y) \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^q) \right) \quad (1.21)$$

und

$$U^i(r, \chi) = -\pi G \mu_z a^2 \left(\sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i U_{ik}(y) \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^q) \right) \quad (1.22)$$

an, wobei

$$y := \frac{r}{a} \quad (1.23)$$

eine dimensionslose radiale Koordinate ist. Die Größe μ_z gibt den Wert der Massendichte im „Zentrum“ $r = 0$ an, der im Allgemeinen kleiner ist als die maximale Massendichte, wenngleich die Abweichung meist nicht groß ist. Hinzu kommen noch die Ansätze⁶

$$\Omega^2 = \pi G \mu_z \left(\sum_{i=0}^{q+2} \Omega_i \sigma^i + o(\sigma^{q+2}) \right) \quad (1.24)$$

und

$$V_0 = -\pi G \mu_z a^2 \left(\sum_{i=0}^q v_i \sigma^i + o(\sigma^q) \right). \quad (1.25)$$

Da das Gravitationspotential im Äußeren des Rings logarithmische Ausdrücke in r enthält, ist es keine Überraschung, dass Terme mit $\ln \sigma$ in den Koeffizienten auftreten.

⁶Wie sich bald zeigen wird, gilt $\Omega_0 = \Omega_1 = 0$, siehe (1.50). Die Koeffizienten Ω_{q+2} und v_q werden erst in der $(q+1)$ -ten Ordnung bestimmt. In der q -ten Ordnung wird eine Gleichung zwischen den beiden (unbekannten) Größen aufgestellt, die zur Berechnung des Potentials im Inneren des Rings benötigt wird.

Dyson hat die Größe

$$\Lambda := \ln \frac{8}{\sigma} - 2 \quad (1.26)$$

eingeführt. Weil $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma \Lambda^\eta = 0$ für alle η gilt, stellt es für das Entwicklungsschema kein Problem dar, dass die Koeffizienten von Λ abhängen.

Bestimmung der Koeffizienten

Im Folgenden wird gezeigt, wie die noch unbekannten Koeffizienten μ_{qk} , Ω_{q+1} und β_{qk} aus jenen niedrigerer Ordnung bestimmt werden können.

Im Fall homogener Materie legt die Oberflächenfunktion $r_{\text{Ob}}(\chi)$ die Massenverteilung bereits vollständig fest, und das Gravitationspotential kann mittels des Poisson-Integrals durch die noch unbekannte Oberfläche $r_{\text{Ob}}(\chi)$ ausgedrückt werden. Für andere Zustandsgleichungen ist es jedoch notwendig, zunächst die Massenverteilung μ zur gewünschten Ordnung zu bestimmen, erst danach kann das Poisson-Integral ausgewertet werden. Nimmt man die Divergenz der Euler-Gleichung (1.10) und verwendet für ΔU^i die Poisson-Gleichung (1.6), dann folgt

$$4\pi G\mu + \Delta h - 2\Omega^2 = 0. \quad (1.27)$$

Wenn man nun h mittels der Zustandsgleichung als Funktion von μ ausdrückt, so ergibt sich eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für μ . Entwickelt man diese Gleichung in σ und fordert ihre Gültigkeit für alle Potenzen von σ und alle Glieder der Fourier-Entwicklung, dann folgen gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $\mu_{qk}(y)$. Die Konstanten, die beim Lösen dieser Differentialgleichungen auftreten, sind so zu wählen, dass die Funktionen regulär bei $y = 0$ sind und dass die Gleichungen $\mu_{00}(0) = 1$ und $\mu_{ik}(0) = 0$ für alle anderen Indizes i und k gelten; dadurch wird die Gleichung $\mu(0, \chi) = \mu_z$ in jeder Ordnung q erfüllt. Für $k = 0$ reichen diese Bedingungen, um die Funktion eindeutig zu bestimmen. Für $k = 1, 2, \dots, q$ müssen die verbleibenden Konstanten durch die Forderung, dass der Druck auf der Oberfläche verschwindet, bestimmt werden. Verlangt man dies für alle Fourier-Glieder, erhält man $q + 1$ Gleichungen für die verbleibenden q Konstanten. Die zusätzliche Gleichung kann zur Bestimmung von β_{q0} benutzt werden.

Obwohl das Gravitationspotential prinzipiell überall mittels des Poisson-Integrals bestimmt werden könnte, ist es eleganter und viel einfacher, es zunächst nur auf der Symmetrieachse zu berechnen. Daraus kann das Gravitationspotential im gesamten Außenraum und insbesondere auf der Oberfläche bestimmt werden, wo die Gleichung

(1.14) erfüllt sein muss.

Die Koordinaten von Punkten auf der Achse werden im Folgenden mit $(r_A, \chi_A) \equiv (r, \chi)$ bezeichnet, wobei natürlich

$$b = r_A \cos(\chi_A) \quad (1.28)$$

gilt. Die quellenmäßige Darstellung des Achsenpotentials lautet

$$U_{\text{Achse}}(r_A) = -2\pi G \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{Ob}}(\chi')} \frac{\mu (b - r' \cos \chi') r'}{\sqrt{r_A^2 + r'^2 - 2r_A r' \cos \vartheta}} dr' d\chi', \quad (1.29)$$

wobei $\vartheta := \chi' - \chi_A = \chi' - \arccos(b/r_A)$ ist. Die Entwicklung für $r_A \rightarrow \infty$ ergibt⁷

$$\begin{aligned} U_{\text{Achse}}(r_A) &= -2\pi G \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{Ob}}(\chi')} \mu (b - r' \cos \chi') \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r_A} \right)^{l+1} P_l(\cos \vartheta) dr' d\chi' \\ &=: -2\pi^2 G \mu_z a^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{2l-1} \left(\frac{a}{r_A} \right)^{2l-1} \frac{A_l}{\sigma^l} \\ &= -2\pi^2 G \mu_z a^2 \left(\sum_{l=1}^{q+1} \frac{(2l-1)!!}{2l-1} \left(\frac{a}{r_A} \right)^{2l-1} \frac{A_l}{\sigma^l} + o(\sigma^q) \right), \end{aligned} \quad (1.30)$$

wobei P_l das Legendre-Polynom vom Grad l ist. Wegen der Äquatorsymmetrie tauchen nur ungerade Potenzen von $1/r_A$ auf. Die Koeffizienten A_l können nach σ entwickelt werden:

$$A_l = \sum_{i=l-1}^q \alpha_{li} \sigma^i + o(\sigma^q). \quad (1.31)$$

Wie bereits erwähnt, kann das Achsenpotential U_{Achse} auf den gesamten Außenraum fortgesetzt werden. Dazu führt man einen Satz von axialsymmetrischen Lösungen der Laplace-Gleichung ein, die im Unendlichen verschwinden und nur bei $r = 0$ Singularitäten besitzen. Zuerst definiert man

$$I_1(\varrho, z) := \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{b^2 + \varrho^2 + z^2 - 2b\varrho \cos \varphi}}, \quad (1.32)$$

was bis auf einen konstanten Faktor nichts anderes als das Potential einer kreisförmigen Massenlinie vom Radius b um die Achse ist. Dies lässt sich mithilfe des vollständigen

⁷Die „doppelte Fakultät“ bedeutet $(2l-1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l-1)$ bzw. $(2l)!! := 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2l$ für alle $l \in \mathbb{N}^+$. Meist definiert man zusätzlich $(-1)!! := 1$ und $0!! := 1$. Damit ist $(2l-1)!!/(2l-1) = (2l-3)!!$ für alle $l \in \mathbb{N}^+$.

elliptischen Integrals erster Gattung

$$\mathcal{K}(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (1.33)$$

als

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{(b + \varrho)^2 + z^2}} \mathcal{K}\left(\frac{2\sqrt{b\varrho}}{\sqrt{(b + \varrho)^2 + z^2}}\right) = \frac{2\mathcal{K}\left(\sqrt{\frac{4b^2 - 4br \cos \chi}{4b^2 - 4br \cos \chi + r^2}}\right)}{\sqrt{4b^2 - 4br \cos \chi + r^2}} \quad (1.34)$$

schreiben. Weil die Differenz zweier solcher Lösungen mit verschiedenem b selbst eine Lösung der Laplace-Gleichung ist, ist auch

$$I_l(r, \chi) := \left(-\frac{1}{b} \frac{d}{db}\right)^{l-1} I_1(r, \chi), \quad (1.35)$$

mit⁸

$$\frac{d}{db} := \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)_{\varrho, z} = \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)_{r, \chi} + \cos \chi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \chi}{r} \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (1.36)$$

eine Lösung der Laplace-Gleichung. Auf der Achse gilt

$$I_l(r_A) = \frac{\pi(2l-1)!!}{(2l-1)r_A^{2l-1}}, \quad (1.37)$$

was sofort aus (1.32) für $\varrho = 0$, d. h. $I_1 = \pi/\sqrt{b^2 + \varrho^2} = \pi/r_A$, und (1.35) folgt. Die eindeutige Fortsetzung des Achsenpotentials (1.30) auf den gesamten Außenraum lautet

$$U^a(r, \chi) = -2\pi G \mu_z a^2 \left(\sum_{l=1}^{q+1} a^{2l-1} \sigma^{-l} A_l I_l(r, \chi) + o(\sigma^q) \right), \quad (1.38)$$

weil dieser Ausdruck die Laplace-Gleichung erfüllt, im Unendlichen verschwindet und die richtigen Achsenwerte hat. Um das Potential auf der Oberfläche zu berechnen, ist es günstig, zunächst $I_l(r, \chi)$ an der Stelle $r/b \rightarrow 0$ zu entwickeln. Zum Beispiel folgt

$$I_1(r, \chi) = \frac{1}{b} \left[\ln\left(\frac{8b}{r}\right) + \frac{[\ln(8b/r) - 1] \cos \chi}{2} \frac{r}{b} + o\left(\frac{r}{b}\right) \right]. \quad (1.39)$$

Wenn man diese Gleichungen auf der Oberfläche $r = r_{\text{Ob}}(\chi)$ auswertet, kann man

⁸Hier bedeutet $\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)_{\varrho, z}$ die partielle Ableitung nach b bei festgehaltenem ϱ und z , und $\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)_{r, \chi}$ die partielle Ableitung nach b bei festgehaltenem r und χ .

mithilfe von Gleichung (1.38) die Koeffizienten ϕ_{ik} in der Entwicklung

$$U_{\text{Ob}}(\chi) = -2\pi G\mu_z a^2 \left(\sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i \phi_{ik} \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^q) \right) \quad (1.40)$$

bestimmen. Die Koeffizienten ϕ_{qk} hängen noch von den q unbekannten β_{qk} ab (es sei daran erinnert, dass β_{q0} schon bekannt ist). Durch den Vergleich der Koeffizienten von $\cos(k\chi)$ ($k = 1, 2, \dots, q$) ergeben sich aus (1.14) q Gleichungen. Zusammen mit der Gleichung (1.4) in relevanter Ordnung in σ kann man daraus Ω_{q+1} und, wie bereits erwähnt, die β_{qk} bestimmen. Das Absolutglied ($\cos(0\chi)$) führt auf eine Beziehung zwischen den beiden unbekannten Größen Ω_{q+2} und v_q .

Größen zur Charakterisierung des Rings

Um einen Ring zu beschreiben, kann man folgende Größen berechnen: *Masse*

$$M := \int \mu \, d^3x \equiv 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{Ob}}(\chi)} \mu r (b - r \cos \chi) \, dr \, d\chi, \quad (1.41)$$

Betrag des Drehimpulses, kurz nur *Drehimpuls* genannt,

$$J := \int \mu \Omega \varrho^2 \, d^3x, \quad (1.42)$$

Druckintegral

$$P := \int p \, d^3x, \quad (1.43)$$

potentielle Energie

$$W := \frac{1}{2} \int \mu U \, d^3x \equiv -\frac{1}{8\pi G} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla U)^2 \, d^3x \quad (1.44)$$

und die *kinetische Energie*

$$T := \frac{1}{2} \int \mu \Omega^2 \varrho^2 \, d^3x. \quad (1.45)$$

Alternativ zur Gleichung (1.41) kann man die Masse auch im Fernfeld ablesen:⁹

$$U \rightarrow -\frac{GM}{x} \quad \text{für} \quad x := |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (1.46)$$

⁹Gemäß (1.30) gilt $M = 2\pi^2 \mu_z a^3 \sigma^{-1} A_1$.

Oft ist auch die *Virialidentität*

$$\boxed{3P + 2T + W = 0,} \quad (1.47)$$

siehe beispielsweise [19], nützlich.

1.1.3 Allgemeine Resultate für dünne Ringe

Das hier beschriebene Näherungsverfahren erlaubt es sogar, ganz ohne Spezifizierung der Zustandsgleichung einige Schlüsse zu ziehen. In führender Ordnung in σ , in der nichts vom Winkel χ abhängt, ist der Ring äquivalent zu einem unendlich langen, selbstgravitierenden Zylinder. Dieses Problem ist bereits in den Arbeiten [20] und [62] untersucht worden.

In führender Ordnung folgt aus (1.11)

$$dh_{00} = \frac{dp_{00}}{\mu_{00}}. \quad (1.48)$$

Die Bernoulli-Gleichung (1.12) ergibt

$$\frac{\Omega^2}{G\mu_z} = o(\sigma^2) \quad (1.49)$$

bzw.

$$\Omega_0 = \Omega_1 = 0. \quad (1.50)$$

Das bedeutet, dass in der führenden Ordnung der Gleichung (1.27) die Winkelgeschwindigkeit nicht auftritt. Es gilt

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right) h_{00} + 4\mu_{00} \equiv \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left(y \frac{dh_{00}}{dy} \right) + 4\mu_{00} = 0. \quad (1.51)$$

Multipliziert man (1.51) mit $\pi^2 \mu_z a^3 \sigma^{-1} y$ und integriert dann von 0 bis 1, erhält man eine Aussage über die Masse (1.41) in führender Ordnung

$$M_f = 4\pi^2 \mu_z a^3 \sigma^{-1} \int_0^1 \mu_{00} y \, dy = -\pi^2 \mu_z a^3 \sigma^{-1} \left. \frac{dh_{00}}{dy} \right|_{y=1}. \quad (1.52)$$

Hier und im Folgenden bedeutet der Index „f“, dass von der entsprechenden Größe nur

der führende Term bei einer Entwicklung in σ gemeint ist. Insbesondere gilt

$$M = M_f[1 + o(\sigma^0)]. \quad (1.53)$$

Zwischen dem Quadrat der Masse und dem Druckintegral gibt es in führender Ordnung einen besonders interessanten Zusammenhang. Unter Verwendung von (1.48) und (1.51) lässt sich in führender Ordnung für das Druckintegral (1.41)

$$\begin{aligned} P_f &= 4\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b \int_0^1 p_{00} y \, dy = -2\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b \int_0^1 \frac{dp_{00}}{dy} y^2 \, dy \\ &= -2\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b \int_0^1 \mu_{00} \frac{dh_{00}}{dy} y^2 \, dy = \frac{\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b}{2} \int_0^1 y \frac{dh_{00}}{dy} \frac{d}{dy} \left(y \frac{dh_{00}}{dy} \right) dy \\ &= \frac{\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b}{4} \int_0^1 \frac{d}{dy} \left(y \frac{dh_{00}}{dy} \right)^2 dy = \frac{\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b}{4} \left(\frac{dh_{00}}{dy} \right)^2 \Big|_{y=1} = \frac{GM_f^2}{4\pi b} \end{aligned} \quad (1.54)$$

schreiben. Die Gleichung

$$\boxed{4\pi b P_f = GM_f^2} \quad (1.55)$$

gilt für völlig beliebige barotrope Zustandsgleichungen¹⁰ $p = p(\mu)$ und ist in [63] bereits für polytrope¹¹ Ringe hergeleitet worden. Um dieses Ergebnis auch für nichtpolytrope Ringe zu überprüfen, kann man beispielsweise eine Sequenz von Ringen der Masse M betrachten, die der Zustandsgleichung

$$\mu = \mu_{\text{Ob}} \sqrt{1 + \frac{4B}{G \mu_{\text{Ob}}^{4/3} M^{2/3}} p} \quad (1.56)$$

genügen. Dabei hat die Konstante μ_{Ob} die Bedeutung der Massendichte auf der Oberfläche, und B ist eine beliebige positive Konstante. Im Grenzfall $B \rightarrow 0$ reduziert sich (1.56) auf die Zustandsgleichung für homogene Materie (1.62), und der Grenzfall $B \rightarrow \infty$ führt auf polytrope Materie mit Polytropenindex $n = 1$. Eine derartige Ringsequenz für $B = 5$ ist neben Sequenzen für polytrope und homogene Ringe in Abb. 1.2 dargestellt, und es bestätigt sich jeweils (1.55).

Die sich aus (1.27) ergebende Differentialgleichung für h_{10} lautet

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right) h_{10} + 4\mu_{10} = 0. \quad (1.57)$$

¹⁰Eine Diskussion dazu (sogar für den relativistischen Fall) befindet sich im Kapitel 2.2.5.

¹¹Die polytrope Zustandsgleichung ist in Formel (1.111) angegeben.

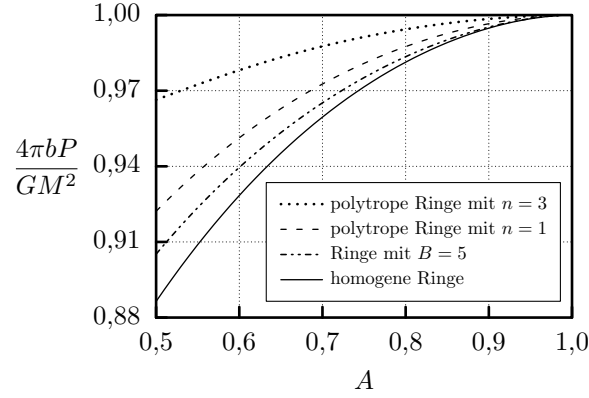


Abbildung 1.2: Numerische Rechnungen bestätigen, dass unabhängig von der Wahl der Zustandsgleichung die Größe $4\pi bP/(GM^2)$ im Grenzfall dünner Ringe ($A \rightarrow 1$) gegen 1 geht, siehe (1.55). Dies gilt insbesondere auch für nichtpolytrope Zustandsgleichungen wie etwa (1.56) mit $B = 5$.

Für eine beliebige Zustandsgleichung $\mu = \mu(h)$ folgt mit den Reihenansätzen (1.19) und (1.20) die Beziehung

$$\mu_{10} = \pi G a^2 h_{10} \left. \frac{d\mu(h)}{dh} \right|_{h=\pi G \mu_z a^2 h_{00}}. \quad (1.58)$$

Insbesondere gilt (für endliches $d\mu/dh$) $h_{10} = 0 \Rightarrow \mu_{10} = 0$. Also ist

$$h_{10} = 0 \quad (1.59)$$

die Lösung der Gleichung (1.57) mit den „Anfangswerten“ $h_{10}(0) = 0$ und $\frac{d}{dy} h_{10}|_{y=0} = 0$. Insbesondere folgt damit

$$\mu_{10} = 0 \quad (1.60)$$

und (bei endlichem $dp/d\mu$)

$$p_{10} = 0. \quad (1.61)$$

1.1.4 Homogene Ringe

Unter *homogener Materie* versteht man Materie mit konstanter Massendichte

$$\mu = \mu_z, \quad (1.62)$$

und es folgt sofort

$$\mu_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (1.63)$$

Das Integral (1.11) für die Druckfunktion ergibt $h = p/\mu_z$, was für die Koeffizienten aus (1.20) und (1.21)

$$h_{ik} = p_{ik} \quad (1.64)$$

bedeutet. Außerdem lässt sich die Schwerpunktsbedingung (1.4) zu

$$\int_0^{2\pi} r_{\text{Ob}}^3(\chi) \cos \chi \, d\chi = 0 \quad (1.65)$$

vereinfachen.

Bei homogenen Körpern ist die Massendichte von Anfang an bekannt. Insbesondere müssen die Funktionen μ_{ik} nicht mithilfe der Gleichung (1.27) bestimmt werden. Auch für die Berechnung der Oberfläche, der Winkelgeschwindigkeit und des Gravitationspotentials ist diese Gleichung nicht notwendig. Nur wenn man auch den Druck oder die Druckfunktion berechnen will, muss man die partielle Differentialgleichung (1.27) bzw. die daraus resultierenden gewöhnlichen Differentialgleichungen für die h_{ik} lösen.

Diese Besonderheit der homogenen Ringe hat Konsequenzen: Hier können nicht alle Koeffizienten eindeutig bestimmt werden. Es gibt nämlich mehr Unbekannte als Gleichungen. Man könnte die Gleichungen lösen und sämtliche Koeffizienten in Abhängigkeit von unbestimmten (freien) Koeffizienten, etwa den β_{i0} , angeben. Alternativ dazu wird hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\beta_{i0} = 0 \quad (1.66)$$

gesetzt. Diese Wahl ist auch in [22] getroffen worden. Dort treten entsprechende Größen gar nicht auf.¹² Bei einer anderen Wahl der freien Koeffizienten ergeben sich die gleichen physikalischen Ergebnisse.

Physikalisch lässt sich diese Freiheit einfach verstehen: Homogene, starr rotierende Körper mitsamt ihren Eigenschaften (Gravitationsfeld, Winkelgeschwindigkeit und Druck) sind bereits durch die Angabe der Oberfläche vollständig bestimmt. Das Poisson-Integral ergibt das Potential (im gesamten Raum), und daraus folgt die Winkelge-

¹²Bei der Verallgemeinerung von Dysons Arbeit auf nichthomogene Ringe bereitete umgekehrt die unerwartete Notwendigkeit nichtverschwindender β_{i0} gewisse Schwierigkeiten.

schwindigkeit mittels (1.14). Der Druck ist schließlich durch die Bernoulli-Gleichung (1.12) festgelegt. Die Darstellung (1.17) einer gegebenen Oberflächenfunktion $r_{\text{Ob}}(\chi)$ ist aber nicht eindeutig. Das heißt die Werte von β_{ik} , a und σ sind, im Gegensatz zu den Größen β_k aus der Fourier-Reihe

$$r_{\text{Ob}}(\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cos(k\chi), \quad (1.67)$$

nicht eindeutig bestimmbar.

Die nullte Ordnung: σ^0

In führender Ordnung ist der Querschnitt ein Kreis

$$r_{\text{Ob}}(\chi) = a[1 + o(\sigma^0)], \quad (1.68)$$

und die Gleichung (1.65) ist folglich automatisch erfüllt. Das Potential (1.29) entlang der Achse eines Torus konstanter Massendichte kann streng gelöst werden¹³

$$U_{\text{Achse}} = -\frac{8\pi G\mu_z a^3}{3r_A} \left[\left(1 + \frac{r_A^2}{a^2}\right) \mathcal{E}\left(\frac{a}{r_A}\right) \sigma^{-1} + \left(1 - \frac{r_A^2}{a^2}\right) \mathcal{K}\left(\frac{a}{r_A}\right) \sigma^{-1} + o(\sigma^{-1}) \right]. \quad (1.69)$$

Dabei ist

$$\mathcal{E}(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad (1.70)$$

das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung. Die Entwicklung in Potenzen von $1/r_A$ ergibt

$$A_1 = 1 + o(\sigma^0), \quad (1.71)$$

und somit

$$\alpha_{10} = 1. \quad (1.72)$$

Das Achsenpotential kann mittels (1.38) auf den gesamten Außenraum fortgesetzt werden. Auf der Oberfläche (1.68) kann das Potential mittels (1.39) in σ entwickelt werden.

¹³Dies ist nicht notwendig, lediglich der Koeffizient α_{10} wird hier benötigt. Er könnte auch einfach mittels (1.30) und (1.31) bestimmt werden. So bestimmt man die α_{li} in höheren Ordnungen.

Es folgt

$$U_{\text{Ob}} = -2\pi G\mu_z a^2 [\Lambda + 2 + o(\sigma^0)] , \quad (1.73)$$

also

$$\phi_{00} = \Lambda + 2. \quad (1.74)$$

Die Gleichung (1.14) bestätigt (1.50) für den homogenen Fall und ergibt

$$\Omega_2 = 2v_0 - 4(\Lambda + 2). \quad (1.75)$$

Diese Gleichung kann vor einer Betrachtung der nächsten Ordnung $q = 1$ nicht weiter vereinfacht werden.

In dieser Ordnung ergibt sich für die Masse (1.41)

$$M = 2\pi^2 \mu_z a^3 [\sigma^{-1} + o(\sigma^{-1})], \quad (1.76)$$

siehe auch (1.52). Der führende Term des Drehimpulses lässt sich erst in der nächsten Ordnung bestimmen, weil erst dann Ω_2 bekannt ist.

Um das Innere des Rings zu behandeln, muss man die Gleichung (1.51) lösen, wobei hier $\mu_{00} = 1$ ist, siehe (1.63). Die Lösung ist

$$h_{00} = -y^2 + C_1 \ln y + C_2. \quad (1.77)$$

Bei $y = 0$ muss die Druckfunktion regulär sein, folglich ist $C_1 = 0$. Auf der Oberfläche muss die Druckfunktion verschwinden, also ist $C_2 = 1$. Das Potential in dieser Ordnung folgt aus der Bernoulli-Gleichung (1.12) zu

$$U_{00} = h_{00} + v_0 - \frac{\Omega_2}{2}, \quad (1.78)$$

wobei sowohl v_0 als auch Ω_2 unbekannt sind, aber die benötigte Kombination durch (1.75) gegeben ist. Damit folgt

$$U_{00} = 2\Lambda + 5 - y^2, \quad (1.79)$$

und mit (1.22)

$$U^i = -\pi G\mu_z a^2 [2\Lambda + 5 - y^2 + o(\sigma^0)], \quad (1.80)$$

was sich auf der Oberfläche tatsächlich zu (1.73) reduziert.

Mithilfe der inneren Größen kann man die potentielle Energie (1.44) und das Druckintegral (1.43) in führender Ordnung bestimmen. Es gilt

$$W = -\pi^3 G \mu_z^2 a^5 \left[\left(2\Lambda + \frac{9}{2} \right) \sigma^{-1} + o(\sigma^{-1}) \right] \quad (1.81)$$

und

$$P = \pi^3 G \mu_z^2 a^5 [\sigma^{-1} + o(\sigma^{-1})], \quad (1.82)$$

siehe auch (1.54). Zusammen mit (1.76) kann man explizit prüfen, dass die Beziehung (1.55) für homogene Ringe erfüllt ist. Wie beim Drehimpuls ist der führende Term der kinetischen Energie mittels der Gleichung (1.45) erst in der nächsten Ordnung bestimmbar.¹⁴

Die erste Ordnung: σ^1

Die Oberflächenfunktion ist

$$r_{\text{Ob}}(\chi) = a[1 + \beta_{11}\sigma \cos \chi + o(\sigma)], \quad (1.83)$$

und Gleichung (1.65) wird zu

$$0 = \int_0^{2\pi} r_{\text{Ob}}^3 \cos \chi \, d\chi = a^3 [3\pi \beta_{11} \sigma + o(\sigma)]. \quad (1.84)$$

Es folgt also

$$\beta_{11} = 0. \quad (1.85)$$

Das bedeutet, dass sich wieder die Oberflächenfunktion (1.68) ergibt, aber einen Schritt weiter in σ :

$$r_{\text{Ob}} = a[1 + o(\sigma)]. \quad (1.86)$$

¹⁴Mithilfe der Virialidentität könnte man schon in dieser Ordnung das führende Glied der kinetischen Energie (1.104) bestimmen. Daraus ließen sich mit dem Massenträgheitsmoment $\Theta = 2\pi^2 \mu_z a^5 [\sigma^{-3} + o(\sigma^{-3})]$ via $J = \sqrt{2T\Theta}$ und $\Omega^2 = 2T/\Theta$ der Drehimpuls (1.96) und die quadrierte Winkelgeschwindigkeit in führender Ordnung, also insbesondere (1.92) und über (1.75) auch (1.94), berechnen. Hier wird darauf verzichtet und die Virialidentität ausschließlich zur Probe verwendet. In diesem Sinne ist beispielsweise Ω_2 in der Ordnung $q = 0$ unbekannt.

1 Newtonsche Ringe

Folglich erhält man erneut das Potential (1.69), aber mit $o(\sigma^0)$ statt $o(\sigma^{-1})$. Die Entwicklung in Potenzen von $1/r_A$ ergibt

$$A_1 = 1 + o(\sigma) \quad \text{und} \quad A_2 = -\frac{\sigma}{8} + o(\sigma). \quad (1.87)$$

Die neuen Koeffizienten sind also

$$\alpha_{11} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_{21} = -\frac{1}{8}. \quad (1.88)$$

Wieder folgt das Potential auf der Oberfläche über (1.38), (1.39) und der entsprechenden Gleichung für I_2 :

$$U_{\text{Ob}} = -2\pi G\mu_z a^2 \left[\Lambda + 2 + \left(\frac{\Lambda}{2} + \frac{3}{8} \right) \sigma \cos \chi + o(\sigma) \right]. \quad (1.89)$$

Es resultieren die neuen Koeffizienten

$$\phi_{10} = 0 \quad \text{und} \quad \phi_{11} = \frac{\Lambda}{2} + \frac{3}{8}. \quad (1.90)$$

Setzt man die Entwicklung

$$\left. \frac{1}{2} \Omega^2 \varrho^2 \right|_{\text{Ob}} = \pi G\mu_z a^2 \left[\frac{\Omega_2}{2} + \left(\frac{\Omega_3}{2} - \Omega_2 \cos \chi \right) \sigma + o(\sigma) \right] \quad (1.91)$$

zusammen mit (1.25) und (1.89) in (1.14), ergeben sich zwei neue Gleichungen, wenn man die Koeffizienten von $\sigma^i \cos(k\chi)$ einzeln betrachtet:

$$\Omega_2 = \Lambda + \frac{3}{4}, \quad (1.92)$$

$$\Omega_3 = 2v_1. \quad (1.93)$$

Aus (1.75) folgt damit

$$v_0 = \frac{5}{2}\Lambda + \frac{35}{8}. \quad (1.94)$$

Die Gleichung (1.93) kann vor einer Betrachtung der nächsten Ordnung $q = 2$ nicht weiter vereinfacht werden.

Für die Masse (1.41) und den Drehimpuls (1.42) folgen

$$M = 2\pi^2 \mu_z a^3 [\sigma^{-1} + o(\sigma^0)] \quad (1.95)$$

und

$$J = \sqrt{\pi^5 G \mu_z^3 (4\Lambda + 3)} a^5 [\sigma^{-2} + o(\sigma^{-2})]. \quad (1.96)$$

Um die inneren Größen zu berechnen, muss man die Gleichung (1.27) lösen. Der Ansatz (1.20) führt auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 h_{10}}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dh_{10}}{dy} = 0 \quad (1.97)$$

und

$$\frac{d^2 h_{11}}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dh_{11}}{dy} - \frac{h_{11}}{y^2} + 2y = 0. \quad (1.98)$$

Das Glied $2y$ ergibt sich dabei aus der schon bekannten Funktion $h_{00} = 1 - y^2$. Die Lösungen dieser Gleichungen, welche regulär bei $y = 0$ sind und $h(r_{\text{Ob}}(\chi), \chi) = 0$ erfüllen, sind

$$h_{10} = 0 \quad (1.99)$$

und

$$h_{11} = \frac{y}{4}(1 - y^2). \quad (1.100)$$

Mit diesen Ergebnissen folgt aus Gleichung (1.12)

$$U_{10} = 0 \quad (1.101)$$

und

$$U_{11} = (\Lambda + 1)y - \frac{y^3}{4}. \quad (1.102)$$

Nachdem der Druck und das Potential im Inneren bestimmt sind, lassen sich nun potentielle Energie (1.44)

$$W = -\pi^3 G \mu_z^2 a^5 \left[\left(2\Lambda + \frac{9}{2} \right) \sigma^{-1} + o(\sigma^0) \right], \quad (1.103)$$

Tabelle 1.1: Für homogene Ringe mit Radienverhältnis $A = 0,9$ werden für verschiedene physikalische Größen numerisch bestimmte Werte und Werte zu unterschiedlichen Ordnungen q mit denen zur Ordnung $q = 20$: $\hat{M}_{20} = 4,629\,917\,988\,430\,481\,629\,3 \cdot 10^{-2}$, $\hat{\Omega}_{20}^2 = 3,247\,468\,326\,495\,321\,161\,0 \cdot 10^{-2}$, $\hat{J}_{20} = 7,545\,621\,525\,628\,932\,066\,9 \cdot 10^{-3}$, $\hat{P}_{20} = 1,786\,294\,652\,814\,276\,170\,8 \cdot 10^{-4}$, $\hat{T}_{20} = 6,798\,881\,696\,465\,374\,949\,0 \cdot 10^{-4}$ und $\hat{W}_{20} = -1,895\,664\,735\,137\,357\,841\,0 \cdot 10^{-3}$ verglichen.

q	σ	$\frac{\hat{M}_q}{\hat{M}_{20}} - 1$	$\frac{\hat{\Omega}_q^2}{\hat{\Omega}_{20}^2} - 1$	$\frac{\hat{J}_q}{\hat{J}_{20}} - 1$	$\frac{\hat{P}_q}{\hat{P}_{20}} - 1$	$\frac{\hat{T}_q}{\hat{T}_{20}} - 1$	$\frac{\hat{W}_q}{\hat{W}_{20}} - 1$
1	0,053	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
2	0,052	$2 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$
3	0,052	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
4	0,052	$3 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-5}$	$-2 \cdot 10^{-5}$
10	0,052	$6 \cdot 10^{-11}$	$-9 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-10}$	$-6 \cdot 10^{-10}$	$-3 \cdot 10^{-10}$
19	0,052	$4 \cdot 10^{-17}$	$4 \cdot 10^{-17}$	$6 \cdot 10^{-17}$	$1 \cdot 10^{-16}$	$9 \cdot 10^{-17}$	$9 \cdot 10^{-17}$
num	—	$-4 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-16}$	$-4 \cdot 10^{-14}$	$-7 \cdot 10^{-14}$	$-4 \cdot 10^{-14}$	$-3 \cdot 10^{-14}$

Tabelle 1.2: Für homogene Ringe mit Radienverhältnis $A = 0,5$ werden für verschiedene physikalische Größen Werte zu unterschiedlichen Ordnungen q mit den numerisch bestimmten Werten $\hat{M}_{\text{num}} = 0,720\,129\,2$, $\hat{\Omega}_{\text{num}}^2 = 0,546\,760\,4$, $\hat{J}_{\text{num}} = 0,324\,794\,9$, $\hat{P}_{\text{num}} = 0,048\,747\,13$, $\hat{T}_{\text{num}} = 0,120\,082\,0$, $\hat{W}_{\text{num}} = -0,386\,405\,3$ verglichen.

q	σ	$\frac{\hat{M}_q}{\hat{M}_{\text{num}}} - 1$	$\frac{\hat{\Omega}_q^2}{\hat{\Omega}_{\text{num}}^2} - 1$	$\frac{\hat{J}_q}{\hat{J}_{\text{num}}} - 1$	$\frac{\hat{P}_q}{\hat{P}_{\text{num}}} - 1$	$\frac{\hat{T}_q}{\hat{T}_{\text{num}}} - 1$	$\frac{\hat{W}_q}{\hat{W}_{\text{num}}} - 1$
1	0,33	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$4,2 \cdot 10^{-1}$	$8,6 \cdot 10^{-1}$	$4,6 \cdot 10^{-1}$	$6,1 \cdot 10^{-1}$
2	0,30	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$5,9 \cdot 10^{-2}$	$6,5 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$
3	0,30	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$8,1 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$
4	0,30	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$
10	0,29	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$
20	0,29	$2,6 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$7,2 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$

kinetische Energie (1.45)

$$T = \pi^3 G \mu_z^2 a^5 \left[\left(\Lambda + \frac{3}{4} \right) \sigma^{-1} + o(\sigma^{-1}) \right] \quad (1.104)$$

und das Druckintegral (1.43)

$$P = \pi^3 G \mu_z^2 a^5 \left[\sigma^{-1} + o(\sigma^0) \right] \quad (1.105)$$

in erster Ordnung berechnen. Tatsächlich ist damit die Virialidentität (1.47) in erster Ordnung erfüllt.

In den Tabellen B.1–B.4 im Anhang B sind Koeffizienten für höhere Ordnungen angegeben.

Tabelle 1.3: Für homogene Ringe mit Radienverhältnis $A = 0,2$ werden für verschiedene physikalische Größen Werte zu unterschiedlichen Ordnungen q mit den numerisch bestimmten Werten $\hat{M}_{\text{num}} = 0,9424$, $\hat{\Omega}_{\text{num}}^2 = 0,9844$, $\hat{J}_{\text{num}} = 0,4545$, $\hat{P}_{\text{num}} = 0,07865$, $\hat{T}_{\text{num}} = 0,2255$, $\hat{W}_{\text{num}} = -0,6869$ verglichen.

q	σ	$\frac{\hat{M}_q}{\hat{M}_{\text{num}}} - 1$	$\frac{\hat{\Omega}_q^2}{\hat{\Omega}_{\text{num}}^2} - 1$	$\frac{\hat{J}_q}{\hat{J}_{\text{num}}} - 1$	$\frac{\hat{P}_q}{\hat{P}_{\text{num}}} - 1$	$\frac{\hat{T}_q}{\hat{T}_{\text{num}}} - 1$	$\frac{\hat{W}_q}{\hat{W}_{\text{num}}} - 1$
1	0,67	1,0	$7,5 \cdot 10^{-1}$	1,6	5,1	1,6	2,8
2	0,54	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	1,6	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$7,6 \cdot 10^{-1}$
3	0,54	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	1,1	$5,4 \cdot 10^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-1}$
4	0,51	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$3,6 \cdot 10^{-1}$
10	0,47	$6,4 \cdot 10^{-2}$	$6,9 \cdot 10^{-2}$	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$
20	0,46	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$

Diskussion der homogenen Ringe

Mit dem hier dargestellten Iterationsverfahren kann man homogene Ringe, insbesondere deren Oberflächengestalt, Winkelgeschwindigkeit und Druck, zu beliebiger Ordnung in σ berechnen. Explizit ist dies bis zur 20. Ordnung durchgeführt worden.

Wie genau die Ergebnisse sind, lässt sich in den Tabellen 1.1, 1.2 und 1.3 ablesen. Dort sind dimensionslose Größen

$$\frac{\hat{M}}{\bar{M}} = \frac{1}{\mu_z \varrho_a^3}, \quad \frac{\hat{\Omega}^2}{\bar{\Omega}^2} = \frac{1}{G \mu_z}, \quad \frac{\hat{J}}{\bar{J}} = \frac{1}{G^{1/2} \mu_z^{3/2} \varrho_a^5}, \quad \frac{\hat{P}}{\bar{P}} = \frac{\hat{T}}{\bar{T}} = \frac{\hat{W}}{\bar{W}} = \frac{1}{G \mu_z^2 \varrho_a^5} \quad (1.106)$$

und deren Genauigkeitsverbesserung mit steigender Ordnung für verschiedene Radienverhältnisse aufgelistet. Insbesondere für dünne Ringe bekommt man sehr genaue Ergebnisse. Für Ringe mit $A \approx 0,85$ ist die erreichte Genauigkeit zur 20. Ordnung vergleichbar mit jenen Lösungen, die man mit numerischen Methoden, beschrieben in [5], erhält. Für größere Radienverhältnisse ist die Genauigkeit noch besser. Als Nebenprodukt bietet diese Arbeit also einen unabhängigen Test für die numerische Methode (Relativfehler kleiner als 10^{-13} , siehe Tab. 1.1). Man sieht, dass die Ergebnisse selbst für nicht besonders dünne Ringe sehr genau sind.

Die Gestalt des Rings im Querschnitt ist für verschiedene Radienverhältnisse in Abb. 1.3 dargestellt. Die Kurven zur Ordnung $q = 20$ sind für $A \gtrsim 0,3$ kaum von den numerisch berechneten zu unterscheiden. Beim Übergang zu Körpern mit sphäroidaler Topologie ($A \rightarrow 0$) wird die wahre Oberfläche an der Innenseite immer spitzer und nicht mehr gut durch die Fourier-Reihe dargestellt. Aber selbst für $A = 0,1$ stimmt die genäherte Oberfläche des Rings mit der numerisch bestimmten Oberfläche ziemlich gut überein, wie man in Abb. 1.4 sieht. Die Oberflächenfunktion $r_{\text{ob}}(\chi)$, welche in führender Ordnung konstant ist, stimmt mit steigender Ordnung q immer besser mit der

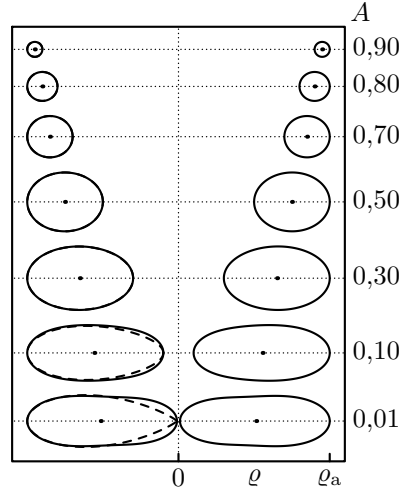


Abbildung 1.3: Querschnitte von homogenen Ringen zur Ordnung $q = 20$ für verschiedene Radienverhältnisse A . Die ϱ - und die z -Achse sind gleich skaliert. Der eingezeichnete Punkt kennzeichnet jeweils den Massenschwerpunkt des Querschnitts ($\varrho = b, z = 0$, d. h. $r = 0$), und die gestrichelte Linie ist die numerisch bestimmte Oberfläche.

numerisch bestimmten Oberfläche überein. Auch der Druck in der Äquatorebene liegt mit steigender Ordnung immer näher am numerisch bestimmten Druck. In Abb. 1.5 ist dies für $A = 0,3$ dargestellt. Es zeigt sich, dass der Schwerpunkt des Querschnitts nicht mit dem Punkt maximalen Drucks übereinstimmt. In Abb. 1.6 sind Flächen mit konstantem Druck für den homogenen Ring mit Radienverhältnis $A = 0,1$ für verschiedene Ordnungen q dargestellt. In führender Ordnung ($q = 0$) ergeben sich gemäß (1.21) im Querschnitt konzentrische Kreise:

$$p_{00}(y_p) \stackrel{!}{=} \frac{p}{\pi G \mu_z^2 a^2} \quad \Rightarrow \quad y_p(\chi) = y_0. \quad (1.107)$$

In der nächsten Ordnung ($q = 1$) muss die Gleichung

$$p_{00}(y_p) + p_{11}(y_p) \sigma \cos \chi \stackrel{!}{=} \frac{p}{\pi G \mu_z^2 a^2} \quad (1.108)$$

gelöst werden. Es sei daran erinnert, dass gemäß (1.99) und (1.64) $p_{10} = 0$ gilt. Der Ansatz $y_p(\chi) = y_0 + y_1(\chi) \sigma$ liefert

$$y_p(\chi) = y_0 - \frac{p_{11}(y_0) \cos \chi}{\frac{d}{dy} p_{00}(y)|_{y_0}} \sigma + o(\sigma). \quad (1.109)$$

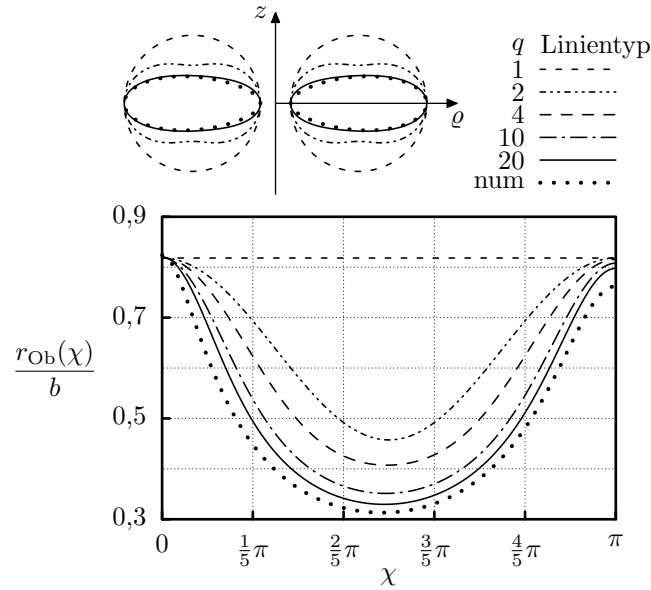


Abbildung 1.4: Der Querschnitt und die dimensionslose Oberflächenfunktion $r_{\text{Ob}}(\chi)/b$ des homogenen Rings mit Radienverhältnis $A = 0,1$ für verschiedene Ordnungen q verglichen mit den numerischen Ergebnissen. Die Oberflächen sind so skaliert, dass ϱ_a und somit auch ϱ_i für alle Ordnungen die gleichen Werte haben.

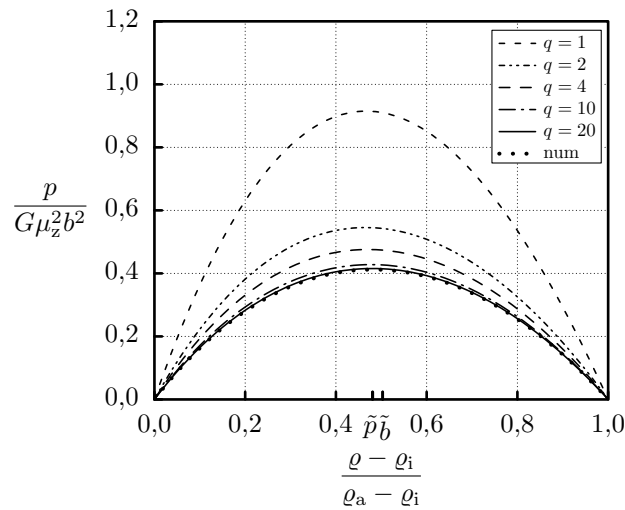


Abbildung 1.5: Der Druck in der Äquatorebene für homogene Ringe mit Radienverhältnis $A = 0,3$ für verschiedene Ordnungen q verglichen mit dem numerischen Ergebnis. Es zeigt sich, dass der Schwerpunkt des Querschnitts nicht mit dem Punkt maximalen Drucks übereinstimmt. In der Ordnung $q = 20$ ergibt sich $\tilde{b} := (b - \varrho_i)/(\varrho_a - \varrho_i) = 0,503$ und $\tilde{p} := (\varrho_{\text{p,max}} - \varrho_i)/(\varrho_a - \varrho_i) = 0,480$, wobei beide Werte deutlich weniger als 1 % von den numerischen Werten abweichen.

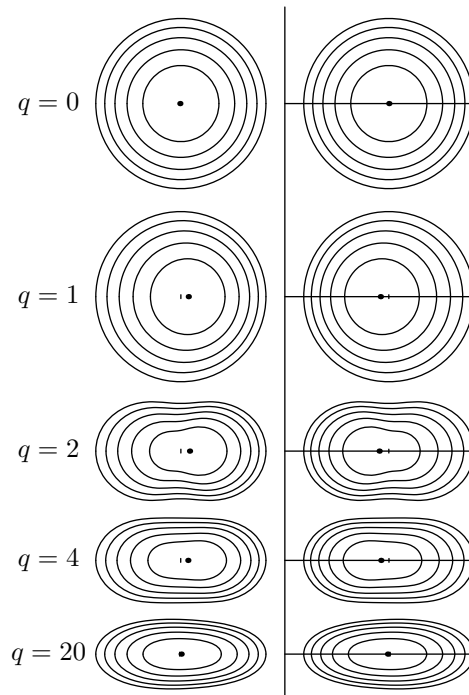


Abbildung 1.6: Flächen mit konstantem Druck für den homogenen Ring mit Radienverhältnis $A = 0,1$ in Abhängigkeit von der Ordnung q . Der maximale Druck sei p_{\max} . Die gewählten Werte von p/p_{\max} , beginnend bei der Oberfläche und nach innen steigend, sind 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 und 1. Der Ort maximalen Drucks ist mit dem Punkt markiert, während der kleine Strich den Schwerpunkt ($\varrho = b, z = 0$) des Querschnitts anzeigt.

Für die resultierenden Koordinaten ϱ_p und z_p gilt

$$\left(\varrho_p - b - \frac{p_{11}(y_0)}{\frac{d}{dy}p_{00}(y)|_{y_0}} \sigma \right)^2 + z_p^2 = y_0^2 + o(\sigma). \quad (1.110)$$

Auch in der Ordnung $q = 1$ sind die isobaren Flächen im Querschnitt betrachtet (bei Vernachlässigung höherer Terme¹⁵ in σ) Kreise. Für vorgegebenen Druck bleibt der Radius gegenüber der Ordnung $q = 0$ unverändert¹⁶, während der Mittelpunkt in Abhängigkeit von y_0 , d. h. vom Druck, verschoben ist. Die Kreise sind also nicht mehr konzentrisch. Das Gleiche gilt auch für polytrope Ringe, siehe [63], und sogar für Ringe mit völlig beliebiger Zustandsgleichung, siehe (1.61). Für höhere Ordnungen werden die Flächen immer komplizierter. Daher bietet es sich an, die Gleichung (1.21) bei vorgegebenem σ numerisch zu lösen. Im Allgemeinen (für $q \geq 2$) ergibt sich damit für die Fläche mit $p = 0$ aber nicht exakt die Oberfläche $r_{\text{Ob}}(\chi)$ der entsprechenden Ordnung. Die Abweichung sind jedoch von höherer Ordnung in σ . Die Ursache ist, dass die Gleichung $p(r_{\text{Ob}}(\chi), \chi) = 0$ nicht streng, sondern nur bis zur q -ten Ordnung erfüllt ist. Wie schon erwähnt, ist es nicht ganz eindeutig, was unter *der* isobaren Fläche zum Druck p in q -ter Ordnung zu verstehen ist. Insbesondere kann man *die* isobaren Flächen derart bestimmen, dass jene zu $p = 0$ mit der Oberfläche $r_{\text{Ob}}(\chi)$ in jeder Ordnung q exakt zusammenfällt. Dazu setzt man in die Entwicklungsformel (1.21) für den Druck die Argumente $r = \alpha_r r_{\text{Ob}}(\chi)$ und χ ein und entwickelt dann bis zur gewünschten Ordnung q und verwendet schließlich einen konkreten Wert für σ . Gleichsetzen dieses Ausdrucks mit einem konkreten Druck liefert eine implizite Gleichung $f(\alpha_r, \chi) = \text{const}$ für die Koordinaten $r = \alpha_r r_{\text{Ob}}(\chi)$ und χ der gesuchten isobaren Flächen. Mit dieser Methode wurde nicht nur Abb. 1.6 erzeugt, sondern auch Abb. 1.5, d. h. der dort verwendete Ausdruck für p verschwindet streng auf der Oberfläche.

Die Abbildungen 1.7, 1.8 und 1.9 zeigen die dimensionslose quadrierte Winkelgeschwindigkeit, die Masse und den Drehimpuls als Funktion des Radienverhältnisses für verschiedene Ordnungen q im Vergleich mit dem jeweiligen numerischen Ergebnis.

Die Behauptung aus [85], dass Dysons Methode für $\sigma > 1/3$ divergiere, siehe auch die Kommentare in [22] und [11], kann durch die hier gezeigten Resultate nicht bestätigt

¹⁵Die Gleichung (1.108) ließe sich durch allgemeinere Ansätze, wie etwa $y_p(\chi) = y_0 + y_1(\chi)\sigma + y_2(\chi)\sigma^2$, auch zu höherer Ordnung in σ lösen. Dies ist jedoch nicht unbedingt sinnvoll, da sich für $y_2(\chi)$ im Gegensatz zu $y_1(\chi)$ in der nächsten Ordnung zusätzliche Terme mit $p_{2k}(y)$ ergeben. Es sei angemerkt, dass es nicht ganz eindeutig ist, was unter *der* isobaren Fläche zum Druck p in q -ter Ordnung zu verstehen ist.

¹⁶Bei nichtverschwindendem p_{10} ergäbe sich $\left(\varrho_p - b - \frac{p_{11}(y_0)\sigma}{\frac{d}{dy}p_{00}(y)|_{y_0}} \right)^2 + z_p^2 = \left(y_0 - \frac{p_{10}(y_0)\sigma}{\frac{d}{dy}p_{00}|_{y_0}} \right)^2 + o(\sigma)$.

Der Radius würde sich gegenüber der Ordnung $q = 0$ also ändern.

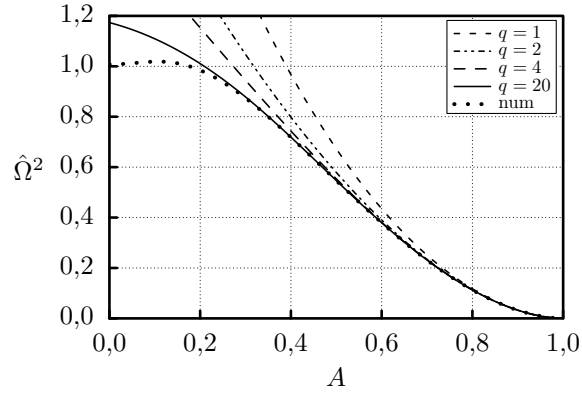


Abbildung 1.7: Die dimensionslose quadrierte Winkelgeschwindigkeit $\hat{\Omega}^2$ homogener Ringe als Funktion des Radienverhältnisses A für verschiedene Ordnungen q verglichen mit dem numerischen Ergebnis.

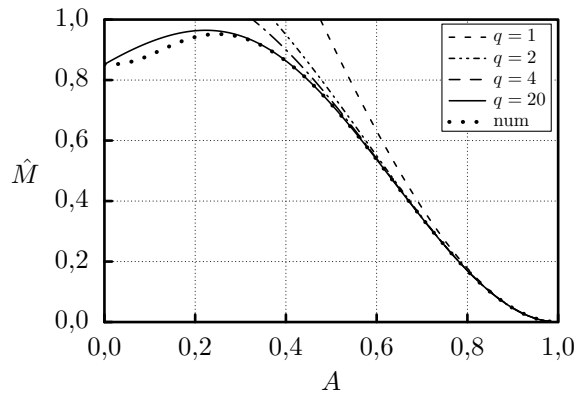


Abbildung 1.8: Die dimensionslose Masse \hat{M} homogener Ringe als Funktion des Radienverhältnisses A für verschiedene Ordnungen q verglichen mit dem numerischen Ergebnis.

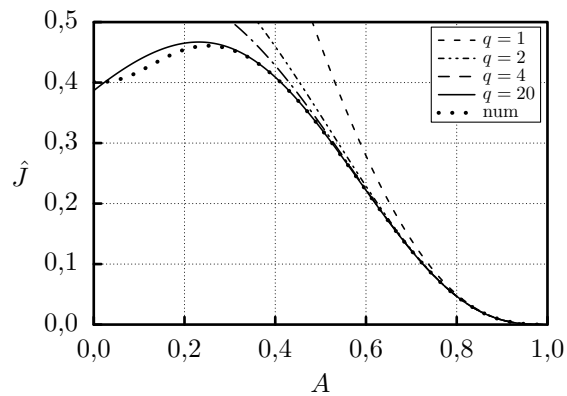


Abbildung 1.9: Der dimensionslose Drehimpuls \hat{J} homogener Ringe als Funktion des Radienverhältnisses A für verschiedene Ordnungen q verglichen mit dem numerischen Ergebnis.

werden.

1.1.5 Polytrope Ringe

Zylindrische Lane-Emden-Gleichung

Die *polytrope Zustandsgleichung* lautet

$$\boxed{p = K\mu^{1+1/n}}. \quad (1.111)$$

Dabei ist K die *Polytropenkonstante* und n der *Polytropenindex*. Für große/kleine Polytropenindizes n beschreibt die Gleichung „weiche/steife“ Materie¹⁷. In verschiedenen physikalischen Situationen gilt diese Zustandsgleichung: Die Polytropenindizes $n = 3/2$ und $n = 3$ entsprechen einem nichtrelativistischen und einem ultrarelativistischen, vollständig entarteten Fermi-Gas, siehe (2.26). Außerdem beschreibt $n = 3/2$ ein einatomiges ideales Gas im adiabatischen Gleichgewicht. Für ein molekulares ideales Gas mit f Freiheitsgraden pro Molekül gilt im adiabatischen Gleichgewicht $n = f/2$. Der Grenzfall $n \rightarrow \infty$ liefert die Gleichung für isotherme ideale Gase. Homogene Materie (1.62) ist als Grenzfall $n \rightarrow 0$ beinhaltet, weswegen die Begriffe „homogene Materie“ und „ $n \rightarrow 0$ “ im Folgenden synonym verwendet werden. Um das zu sehen, betrachtet man die Gleichung (1.111) für die Werte am „Punkt“ $r = 0$: $p_z = K\mu_z^{1+1/n}$. Damit lässt sich die Polytropengleichung auch als $\mu = \mu_z(p/p_z)^{n/(n+1)}$ schreiben und der Grenzfall $n \rightarrow 0$ leicht ausführen.

Für die Druckfunktion (1.11) folgt

$$h = K(n+1)\mu^{1/n}. \quad (1.112)$$

In führender Ordnung ergibt sich aus (1.111) und (1.112)

$$h_{00} = \frac{K(n+1)}{\pi G a^2} \mu_z^{1/n-1} \mu_{00}^{1/n} = (n+1) \frac{p_{00}}{\mu_{00}}. \quad (1.113)$$

Damit ergibt sich die führende Ordnung von (1.27) zu

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{00}^{1/n} + \frac{4\pi}{n+1} \mu_{00} = 0, \quad (1.114)$$

¹⁷Darunter versteht man Materie mit großer/kleiner Kompressibilität $-\mu \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial p}$.

siehe auch (1.51), wobei

$$\bar{r} := \frac{G^{1/2} \mu_z^{(n-1)/(2n)}}{K^{1/2}} r \quad (1.115)$$

eine neue dimensionslose Radialkoordinate ist.

Um die Differentialgleichung (1.114) (bzw. entsprechende Gleichungen in höheren Ordnungen) zu behandeln, könnte man sie auf h_{00} (bzw. h_{ik}) umrechnen, da dann der Differentialoperator direkt auf h_{00} (bzw. h_{ik}) wirkt. Jedoch treten dabei unhandliche Faktoren auf, siehe (1.113). Um diese Faktoren zu „eliminieren“, müsste man wieder eine neue dimensionslose Radialkoordinate einführen. Alternativ dazu kann man die zur Druckfunktion proportionale neue Zustandsgröße

$$\tilde{\mu} := \mu^{1/n} \quad (1.116)$$

mit der Entwicklung

$$\tilde{\mu} = \mu_z^{1/n} \left(\sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i \tilde{\mu}_{ik}(\bar{r}) \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^q) \right), \quad (1.117)$$

verwenden. Insbesondere gilt dann

$$\mu_{00} = \tilde{\mu}_{00}^n \quad (1.118)$$

Damit wird (1.114) zu

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \tilde{\mu}_{00} + \frac{4\pi}{n+1} \tilde{\mu}_{00}^n = 0. \quad (1.119)$$

Diese Gleichung¹⁸ wird in der Literatur *zylindrische Lane-Emden-Gleichung* genannt. Sie und andere *verallgemeinerte Lane-Emden-Gleichungen (erster Gattung)* wurden bereits ausgiebig studiert, siehe etwa [62, 64, 37, 31]. Die Gleichung $\mu(0, \chi) = \mu_z$ ergibt die „Anfangswerte“¹⁹

$$\tilde{\mu}_{00}(0) = 1 \quad \text{und} \quad \left. \frac{d\tilde{\mu}_{00}}{d\bar{r}} \right|_{\bar{r}=0} = 0. \quad (1.120)$$

¹⁸Mit den Größen $\xi := \sqrt{\frac{4\pi}{n+1}} \bar{r}$ und $\Theta := \tilde{\mu}_{00}$ lässt sich die Gleichung in die Standardform

$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \right) \Theta + \Theta^n = 0$ bringen.

¹⁹Der Potenzreihenansatz $\tilde{\mu}_{00} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \bar{r}^i$ ergibt $c_1 = 0$.

Für dieses „Anfangswertproblem“ sind außer in den beiden linearen Fällen $n \rightarrow 0$, siehe (1.145), und $n = 1$, siehe (1.151), keine Lösungen in geschlossener Form gefunden worden. Eine auf Symmetrietransformationen basierende Untersuchung [30] der Differentialgleichung lässt vermuten, dass es keine weiteren geschlossenen Lösungen gibt. Im Grenzfall $n \rightarrow 0$ bietet diese Gleichung eine alternative, aber wenig transparente Möglichkeit, die bereits diskutierten homogenen Ringe in führender Ordnung zu behandeln. Auf den Fall $n = 1$ wird später ausführlich eingegangen.

Die erste positive Nullstelle der Funktion $\tilde{\mu}_{00}(\bar{r})$ wird mit \bar{a} bezeichnet, und ist der dimensionslose Radius des in führender Ordnung kreisförmigen Querschnitts:

$$\frac{\bar{a}}{a} = \frac{G^{1/2} \mu_z^{(n-1)/(2n)}}{K^{1/2}}. \quad (1.121)$$

In [62] wird gezeigt, dass die Größen²⁰ \bar{a} und $-\bar{a} \frac{d}{d\bar{r}} \tilde{\mu}_{00}|_{\bar{r}=\bar{a}}$ für alle n endlich sind. Im Gegensatz dazu besitzen die Lösungen der gewöhnlichen Lane-Emden-Gleichung (siehe Anhang D) mit den entsprechenden „Anfangswerten“ bekanntlich nur für $n < 5$ eine endliche Nullstelle, und für $n = 5$ verschwindet die Lösung erst im Unendlichen. Dieser mathematische Unterschied besitzt physikalische Bedeutung: Während polytrope Kugeln nur für $n < 5$ eine Oberfläche bilden, existieren polytrope Zylinder und somit auch Ringe (zumindest im Grenzfall dünner Ringe) für beliebig hohe Polytropenindizes n .

Analytische Ergebnisse für polytrope Ringe mit beliebigem n

Auch bei beliebigem n , also selbst ohne eine analytische Lösung der Gleichung (1.119), lassen sich einige analytische Ergebnisse für den Grenzfall dünner Ringe herleiten. Erhält man für zwei verschiedene physikalische Größen Ausdrücke, in denen dasselbe nicht ausführbare Integral als Faktor auftritt, so lässt sich zumindest das Verhältnis beider Größen angeben. Im Kapitel 1.1.3 war dies für P_f und M_f^2 der Fall.

In diesem Abschnitt wird wieder die dimensionslose Koordinate $y = r/a$ verwendet. Auf der Oberfläche des Rings verschwindet der Druck und folglich die Druckfunktion. Es gilt also $h(r_{\text{Ob}}(\chi), \chi) = 0$, und damit folgt

$$h_{00}(1) = 0 \quad (1.122)$$

und

$$\beta_{11} = -h_{11} \left(\frac{dh_{00}}{dy} \right)^{-1} \Big|_{y=1}. \quad (1.123)$$

²⁰Für einen polytrope Zylinder sind diese Größen proportional zum Radius und zur Masse pro Länge.

Die Schwerpunktsbedingung (1.4) ergibt in führender Ordnung die stets erfüllte Gleichung

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu_{00} y^2 \cos \chi \, dy \, d\chi = 0, \quad (1.124)$$

und in der nächsten Ordnung die echte Bedingung

$$\beta_{11} \mu_{00}(1) + \int_0^1 \mu_{11} y^2 \, dy = 0. \quad (1.125)$$

Für die Berechnung des Potentials im Außenraum sind zunächst die Größen A_l bzw. α_{li} zu bestimmen. Aus (1.30) und (1.31) folgt

$$\alpha_{10} = 2 \int_0^1 \mu_{00} y \, dy = \frac{M_f \sigma}{2\pi^2 \mu_z a^3} \quad (1.126)$$

und

$$\alpha_{21} = \beta_{11} \mu_{00}(1) + \int_0^1 \mu_{11} y^2 - \frac{1}{2} \mu_{00} y^3 \, dy. \quad (1.127)$$

Mit (1.125) vereinfacht sich dies zu

$$\alpha_{21} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \mu_{00} y^3 \, dy = g \alpha_{10}, \quad (1.128)$$

wobei

$$g := -\frac{\int_0^1 \mu_{00} y^3 \, dy}{4 \int_0^1 \mu_{00} y \, dy}. \quad (1.129)$$

Mit den Gleichungen (1.38) und (1.39) lässt sich aus (1.126) das Potential auf der Oberfläche bestimmen. Es lautet

$$U_{\text{Ob}} = -\frac{GM_f}{\pi b} [\Lambda + 2 + o(\sigma^0)]. \quad (1.130)$$

Der Entwicklungskoeffizient Ω_2 der quadrierten Winkelgeschwindigkeit ergibt sich aus den Koeffizienten von $\cos(\chi)\sigma$ in (1.14) und lautet

$$\Omega_2 = \alpha_{10}(\Lambda + 1 - 2\beta_{11}) + 2\alpha_{21} = \alpha_{10}[\Lambda + 1 + 2(g - \beta_{11})]. \quad (1.131)$$

Aus der führenden Ordnung von (1.14) kann man nun V_{0f} zu

$$V_{0f} \equiv -\pi G \mu_z a^2 v_0 = -\frac{GM_f}{2\pi b} \left(\frac{5\Lambda + 9}{2} + g - \beta_{11} \right) \quad (1.132)$$

bestimmen. Der oben auftauchende Term $g - \beta_{11}$ kann mithilfe der Virialidentität (1.47) weiter vereinfacht werden. In führender Ordnung ergibt sich

$$T_f = 2\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b \Omega_2 \int_0^1 \mu_{00} y \, dy = \frac{GM_f^2}{4\pi b} [\Lambda + 1 + 2(g - \beta_{11})] \quad (1.133)$$

und

$$\begin{aligned} W_f &= -2\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b \int_0^1 \mu_{00} U_{00} y \, dy = -2\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b \int_0^1 \mu_{00} (h_{00} - \frac{1}{2}\Omega_2 + v_0) y \, dy \\ &= -2\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b \int_0^1 \mu_{00} h_{00} y \, dy + \frac{1}{2}T_f + \frac{1}{2}V_{0f}M_f. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Mit diesen Ergebnissen und (1.55) ergibt die Virialidentität (1.47) in führender Ordnung

$$\frac{GM_f^2}{4\pi b} [4(g - \beta_{11}) + 1] - 2\pi^3 G \mu_z^2 a^4 b \int_0^1 \mu_{00} h_{00} y \, dy = 0. \quad (1.135)$$

Bisher ging die Zustandsgleichung nicht in die Herleitung ein. Nun aber benötigt man die Gleichung (1.113) für polytrope Ringe in führender Ordnung, um das obige Integral

$$\int_0^1 \mu_{00} h_{00} y \, dy = (n+1) \int_0^1 p_{00} y \, dy = \frac{(n+1)M_f^2}{16\pi^4 \mu_z^2 a^4 b^2} \quad (1.136)$$

weiter zu vereinfachen. Dabei wurde im letzten Schritt (1.55) benutzt. Setzt man diesen Ausdruck in (1.135) ein, dann erhält man

$$g - \beta_{11} = \frac{n-1}{8}. \quad (1.137)$$

Es gilt $1 - A = 2\sigma + o(\sigma)$. Für den Grenzfall dünner polytroper Ringe folgt damit aus (1.131)

$$\frac{\Omega_2}{M_f} = \frac{\sigma}{2\pi^2 \mu_z a^3} \left(\Lambda + \frac{n+3}{4} \right) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{2\pi b^3 \Omega^2}{GM} + \ln(1-A) \rightarrow \frac{n-5}{4} + \ln 16} \quad (1.138)$$

und aus (1.132)

$$\boxed{\frac{4\pi b V_0}{5GM} - \ln(1 - A) \rightarrow \frac{5 - n}{20} - \ln 16.} \quad (1.139)$$

Ähnliche Gleichungen lassen sich für J , T , P und mittels der Virialidentität auch für W herleiten, siehe [63]. Diese Gleichungen gelten auch für homogene Ringe ($n \rightarrow 0$), siehe Kapitel 1.1.4. Es ist bemerkenswert, dass sie ohne Kenntnis der Dichteverteilung $\mu_{00}(y)$ hergeleitet werden konnten. Zwei numerische Beispiele, die das Verhalten (1.139) zeigen, sind in Abb. 1.10 dargestellt.

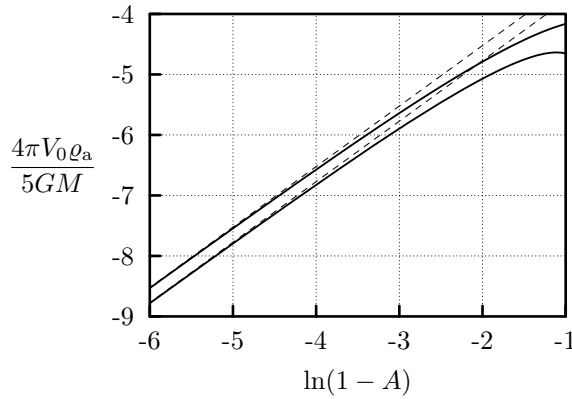


Abbildung 1.10: Numerisch berechnete homogene Ringe (obere durchgezogene Kurve) und polytrope Ringe mit $n = 5$ (untere durchgezogene Kurve). Das asymptotische Verhalten im Grenzfall dünner Ringe ist durch die Gleichung (1.139) gegeben und mit gestrichelter Linien dargestellt.

Numerische Lösung für polytrope Ringe mit beliebigem n

Für beliebige Polytropenindizes n kann man das im Kapitel 1.1.2 beschriebene Iterationsschema numerisch anwenden und dadurch Ergebnisse erzielen, die analytisch nicht zugänglich sind. Dazu beschreibt man die unbekannte Dichte mittels der $\tilde{\mu}_{ik}$ und entwickelt alle vorkommenden Größen zusätzlich in Λ , etwa $\tilde{\mu}_{ik} = \sum_j \tilde{\mu}_{ikj} \Lambda^j$. Stellt man die so eingeführten Koeffizienten $\tilde{\mu}_{ikj}$ als Summe von Tschebyschow-Polynomen dar, so erhält man Differentialgleichungen für die rein numerischen Funktionen $\tilde{\mu}_{ikj}$. Die im Kapitel 1.1.2 beschriebenen Gleichungen müssen erfüllt werden, wobei die Differentialgleichungen für die $\tilde{\mu}_{ikj}$ an den Nullstellen der Tschebyschow-Polynome ausgewertet werden. Im Allgemeinen ist die Funktion $\tilde{\mu}_{00}$ an der Stelle $\bar{r} = \bar{a}$ nicht analytisch. Das bedeutet, dass Polynome hoher Ordnung nötig sind, um gute Näherungen zu erhalten. Trotzdem ist es hier praktikabel, ein symbolisches, also nicht rein numerisches Verfahren zu verwenden, weil die zu lösenden Gleichungen Integrale über die Dichte enthalten,

Tabelle 1.4: Physikalische Größen zur ersten und dritten Ordnung in σ verglichen mit numerischen Werten für (nicht genäherte) polytrope Ringe mit verschiedenen Polytropenindizes n und dem Radienverhältnis $A = 0,9$.

n	q	\bar{b}	\bar{M}	$\bar{\Omega}^2$	\bar{J}	\bar{P}	\bar{T}	\bar{W}
1	1	18,22	143,0	$1,512 \cdot 10^{-2}$	$5,839 \cdot 10^3$	89,24	359,1	-985,8
1	3	18,34	144,3	$1,499 \cdot 10^{-2}$	$5,952 \cdot 10^3$	90,06	364,4	-998,9
1	num	18,34	144,3	$1,499 \cdot 10^{-2}$	$5,953 \cdot 10^3$	90,07	364,5	-999,2
1,5	1	22,43	186,9	$1,094 \cdot 10^{-2}$	$9,836 \cdot 10^3$	124,0	514,3	-1401
1,5	3	22,57	188,5	$1,084 \cdot 10^{-2}$	$1,001 \cdot 10^4$	125,0	521,0	-1417
1,5	num	22,57	188,6	$1,084 \cdot 10^{-2}$	$1,001 \cdot 10^4$	125,0	521,1	-1417
3	1	38,28	356,0	$4,569 \cdot 10^{-3}$	$3,527 \cdot 10^4$	263,5	1192	-3174
3	3	38,52	358,7	$4,524 \cdot 10^{-3}$	$3,581 \cdot 10^4$	265,4	1204	-3205
3	num	38,52	358,8	$4,523 \cdot 10^{-3}$	$3,582 \cdot 10^4$	265,5	1204	-3205
5	1	71,16	714,0	$1,584 \cdot 10^{-3}$	$1,439 \cdot 10^5$	570,2	2864	-7438
5	3	71,70	719,9	$1,563 \cdot 10^{-3}$	$1,464 \cdot 10^5$	574,8	2893	-7511
5	num	71,71	720,0	$1,563 \cdot 10^{-3}$	$1,464 \cdot 10^5$	574,9	2894	-7513

wobei eine Integrationsgrenze von der noch unbekannten Oberflächenfunktion $r_{\text{Ob}}(\chi)$ abhängt.

In Tab. 1.4 sind für verschiedene Polytropenindizes n Resultate des numerisch durchgeführten iterativen Näherungsverfahrens in erster und dritter Ordnung angegeben und mit präzisen Ergebnissen eines rein numerischen Programms (für das nicht genäherte Problem) verglichen. In der Tabelle werden dimensionslose Größen²¹

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{M}}{M} &= \frac{G^{3/2} \mu_z^{(n-3)/(2n)}}{K^{3/2}}, & \frac{\bar{J}}{J} &= \frac{G^2 \mu_z^{(2n-5)/(2n)}}{K^{5/2}}, & \frac{\bar{\Omega}^2}{\Omega^2} &= \frac{1}{G \mu_z}, \\
 \frac{\bar{P}}{P} = \frac{\bar{T}}{T} = \frac{\bar{W}}{W} &= \frac{G^{3/2} \mu_z^{(n-5)/(2n)}}{K^{5/2}}, & \frac{\bar{r}}{r} = \frac{\bar{a}}{a} = \frac{\bar{b}}{b} = \frac{\bar{\varrho}}{\varrho} = \frac{\bar{z}}{z} &= \frac{G^{1/2} \mu_z^{(n-1)/(2n)}}{K^{1/2}}
 \end{aligned} \tag{1.140}$$

verwendet. Der Wert von \bar{b} ändert sich im Gegensatz zu \bar{a} von der ersten zur dritten Ordnung, obwohl in jeder Ordnung $\bar{b} = \bar{a}/\sigma$ gilt. Der Grund ist, dass sich für ein vorgegebenes Radienverhältnis in den verschiedenen Ordnungen leicht unterschiedliche Werte für σ ergeben. Die Werte aus den Zeilen mit $q = 1$ (führende Ordnung) müssen die Gleichung (1.55) erfüllen und erlauben somit eine Überprüfung des Tschebyschow-Verfahrens. Tatsächlich wird in allen betrachteten Fällen die Gleichung (1.55) bei der verwendeten Anzahl von Tschebyschow-Polynomen (~ 25) sogar zu höherer Genauigkeit als den angegebenen vier Stellen erfüllt (Relativfehler $\lesssim 10^{-7}$). Wie bereits erwähnt, ist der Fall mit Polytropenindex $n = 1$ analytisch zugänglich. Dort lassen sich

²¹Die dimensionslosen Größen \bar{r} und \bar{a} wurden schon in (1.115) und (1.121) eingeführt.

sämtliche Gleichungen mindestens bis zur dritten Ordnung streng lösen (siehe nächster Abschnitt). Damit können die hier angegebenen Werte für $n = 1$ in erster und dritter Ordnung bestätigt werden. Für alle betrachteten Polytropenindizes bringt die dritte Ordnung eine merkbare Verbesserung gegenüber der ersten Ordnung. Die Relativfehler für Ringe mit einem Radienverhältnis $A \gtrsim 0,9$ liegen damit deutlich unter 1 %.

Ist man nur an der Bestimmung von \bar{a} , $\bar{M}_f \sigma$, β_{11} und Ω_2 interessiert, dann ist es nicht nötig, solch komplizierte numerische und algebraische Techniken zu kombinieren. Jedes beliebige numerische Verfahren kann bei vorgegebenem Polytropenindex n zur Lösung des „Anfangswertproblems“ (1.119) und (1.120) verwendet werden. Die erste positive Nullstelle der Lösung liefert den Wert von \bar{a} . Die Größe $\bar{M}_f \sigma$ kann mittels eines Integrals über $\tilde{\mu}_{00}^n \bar{r}$ oder alternativ über $\frac{d\tilde{\mu}_{00}}{d\bar{r}}|_{\bar{a}}$ berechnet werden:

$$\bar{M}_f \sigma = 4\pi^2 \bar{a} \int_0^{\bar{a}} \tilde{\mu}_{00}^n \bar{r} d\bar{r} = -\pi(n+1)\bar{a}^2 \left. \frac{d\tilde{\mu}_{00}}{d\bar{r}} \right|_{\bar{r}=\bar{a}}, \quad (1.141)$$

siehe (1.52). Für den Koeffizient β_{11} gilt

$$\beta_{11} = g + \frac{1-n}{8}, \quad (1.142)$$

siehe (1.137), wobei gemäß (1.129)

$$g = -\frac{\int_0^{\bar{a}} \tilde{\mu}_{00}^n \bar{r}^3 d\bar{r}}{4\bar{a}^2 \int_0^{\bar{a}} \tilde{\mu}_{00}^n \bar{r} d\bar{r}} \quad (1.143)$$

ist. Der Koeffizient Ω_2 kann durch (1.138) bestimmt werden.

Ohne Verwendung der Gleichung (1.137) bzw. der Virialidentität hätte man β_{11} mittels

$$\beta_{11} = -\frac{\tilde{\mu}_{11}(\bar{a})}{\bar{a}} \left(\frac{d\tilde{\mu}_{00}}{d\bar{r}} \right)^{-1} \bigg|_{\bar{r}=\bar{a}}, \quad (1.144)$$

siehe (1.123), und Ω_2 dann über (1.131)²² berechnen müssen. Dazu wäre insbesondere die Differentialgleichung für $\tilde{\mu}_{11}$ zu lösen, und zwar so, dass die Schwerpunktsbedingung (1.4) zur ersten Ordnung, also (1.125), erfüllt ist. Die Virialidentität ist hier also sehr nützlich, siehe dazu auch die Fußnote 14.

In der Tabelle 1.5 sind Ergebnisse dieser numerischen Rechnung für ausgewählte Polytropenindizes n angegeben. Die Tabelle legt die Vermutung nahe, dass für $n \rightarrow \infty$ der dimensionslose Radius \bar{a} und $\bar{M}_f \sigma$ exponentiell anwachsen und Ω_2 exponentiell abfällt.

²²Die Gleichung (1.138) stünde dann nicht zur Verfügung.

Tabelle 1.5: Die Entwicklungskoeffizienten von Oberflächenfunktion $r_{\text{Ob}}(\chi)$ und quadrierter Winkelgeschwindigkeit in erster Ordnung für verschiedene Polytropenindizes n . Die Zeilen für $n \rightarrow 0$ und $n = 1$ sowie das asymptotische Verhalten für $n \rightarrow \infty$ sind analytisch bekannt.

n	\bar{a}	$\bar{M}_f \sigma$	β_{11}	Ω_2
0	0,5642	3,545	0	$\Lambda + 3/4$
0,5	0,7565	5,445	-0,035 37	$0,6371(\Lambda + 7/8)$
1	0,9594	7,526	-0,077 08	$0,4318(\Lambda + 1)$
1,5	1,181	9,842	-0,1234	$0,3027(\Lambda + 9/8)$
2	1,427	12,45	-0,1731	$0,2169(\Lambda + 5/4)$
3	2,016	18,75	-0,2801	$0,1159(\Lambda + 3/2)$
5	3,750	37,63	-0,5118	$3,614 \cdot 10^{-2}(\Lambda + 2)$
10	15,18	165,7	-1,126	$2,401 \cdot 10^{-3}(\Lambda + 13/4)$
20	207,6	2405	-2,375	$1,362 \cdot 10^{-5}(\Lambda + 23/4)$
30	2661	$3,157 \cdot 10^4$	-3,625	$8,487 \cdot 10^{-8}(\Lambda + 33/4)$
40	$3,337 \cdot 10^4$	$4,011 \cdot 10^5$	-4,875	$5,468 \cdot 10^{-10}(\Lambda + 43/4)$
50	$4,142 \cdot 10^5$	$5,019 \cdot 10^6$	-6,125	$3,577 \cdot 10^{-12}(\Lambda + 53/4)$

Das Verhalten dieser Größen und β_{11} für große n wird im Kapitel 1.1.6 diskutiert. In den nächsten beiden Kapiteln werden analytische Ausdrücke für \bar{a} , $\bar{M}_f \sigma$, β_{11} und Ω_2 in den Fällen $n \rightarrow 0$ und $n = 1$ bestimmt, welche die numerisch ermittelten Werte bestätigen.

In Abb. 1.11 ist der Verlauf von $\bar{M}_f/(4\pi\bar{b})$ in Abhängigkeit von $n/(n+1)$ vom homogenen Grenzfall $n \rightarrow 0$ bis zum „isothermen“ Grenzfall $n \rightarrow \infty$ dargestellt. Die Werte für $n \rightarrow 0$, $n = 1$ und $n \rightarrow \infty$ sind analytisch bekannt, siehe (1.148), (1.154) und (1.207). Die übrige Kurve wurde numerisch bestimmt.

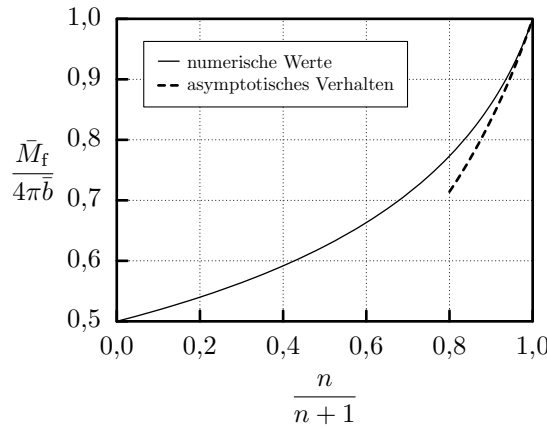


Abbildung 1.11: Die numerisch bestimmte dimensionslose Größe $\bar{M}_f/(4\pi\bar{b})$ in Abhängigkeit von $n/(n+1)$ über dem gesamten Intervall aller Polytropenindizes $n \in [0, \infty)$. Zusätzlich ist das asymptotische Verhalten gemäß (1.212) für Polytropenindizes $n \geq 4$ dargestellt.

Analytische Lösung für polytrope Ringe mit $n \rightarrow 0$

Der homogene Grenzfall $n \rightarrow 0$ wurde bereits ausführlich behandelt, jedoch nicht mittels der Gleichung (1.119). Deren Lösung mit den „Anfangswerten“ (1.120) lautet²³

$$\tilde{\mu}_{00} = 1 - \pi \bar{r}^2 \quad \text{für} \quad n \rightarrow 0, \quad (1.145)$$

und die erste positive Nullstelle ist

$$\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,564\,189\dots \quad \text{für} \quad n \rightarrow 0. \quad (1.146)$$

Für die dimensionslose Masse in führender Ordnung folgt damit aus (1.141)

$$\bar{M}_f \sigma = 2\pi^2 \bar{a}^3 = 2\sqrt{\pi} = 3,544\,907\dots \quad \text{für} \quad n \rightarrow 0, \quad (1.147)$$

siehe auch (1.76). Weiterhin gilt

$$\frac{\bar{M}_f}{4\pi \bar{b}} = \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \rightarrow 0. \quad (1.148)$$

Die Gleichungen (1.142) und (1.138) liefern die bekannten Resultate $\beta_{11} = 0$ und $\Omega_2 = \Lambda + 3/4$ für homogene Ringe, siehe (1.92) und (1.85)²⁴.

Analytische Lösung für polytrope Ringe mit $n = 1$

Die nullte Ordnung: σ^0 Für $n = 1$ gilt $\tilde{\mu} = \mu$ und somit $\tilde{\mu}_{ik} = \mu_{ik}$. Die Gleichung (1.119) reduziert sich damit auf

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{00} + 2\pi \mu_{00} = 0. \quad (1.149)$$

Diese Besselsche Differentialgleichung besitzt die Lösung

$$\mu_{00} = C_1 J_0(\sqrt{2\pi} \bar{r}) + C_2 Y_0(\sqrt{2\pi} \bar{r}), \quad (1.150)$$

wobei J_i die Bessel-Funktion (erster Gattung) und Y_i die Neumann-Funktion (auch Bessel-Funktion zweiter Gattung genannt) ist, siehe etwa [75]. Die Bedingung $\mu(r =$

²³Für $\mu_{00} = \tilde{\mu}_{00}^n$ ergibt sich für $n \rightarrow 0$ in Übereinstimmung mit (1.63): $\mu_{00} = 1$.

²⁴Dort wurden gemäß (1.66) die Koeffizienten $\beta_{i0} = 0$ gesetzt. Auch mit dem Ansatz $r_{\text{ob}}(\chi) = a[1 + (\beta_{10} + \beta_{11} \cos \chi)\sigma + o(\sigma)]$, also mit beliebigem β_{10} , ergeben sich dieselben Koeffizienten $\beta_{11} = 0$ und $\Omega_2 = \Lambda + 3/4$, wohingegen andere Koeffizienten, wie etwa $\phi_{10} = (2\Lambda + 3)\beta_{10}$, von dieser Wahl abhängen.

$0, \chi) = \mu_z$ besagt $C_1 = 1$ und $C_2 = 0$, also

$$\mu_{00} = J_0(\sqrt{2\pi}\bar{r}). \quad (1.151)$$

Die k -te positive Nullstelle der Bessel-Funktion J_i wird im Folgenden mit j_{ik} bezeichnet. Die erste positive Nullstelle von μ_{00} lautet damit

$$\bar{a} = \frac{j_{01}}{\sqrt{2\pi}} = 0,959\,386\dots \quad (1.152)$$

Für den Polytropenindex $n = 1$ ist der Wert von $a = \bar{a}\sqrt{K/G}$, siehe (1.121), offenbar unabhängig von der Dichte μ_z . Die Ursache dafür ist folgende Invarianz bei $n = 1$: Mit $U(\vec{x})$, $\mu(\vec{x}) = K\sqrt{p(\vec{x})}$ und $\vec{v}(\vec{x})$ sind auch $\eta U(\vec{x})$, $\eta\mu(\vec{x}) = K\sqrt{\eta^2 p(\vec{x})}$ und $\sqrt{\eta}\vec{v}(\vec{x})$ Lösungen von Poisson- und Euler-Gleichung, wobei η ein beliebiger Skalierungsfaktor ist.

Für die dimensionslose Masse (1.41) ergibt sich in führender Ordnung

$$\bar{M}_f \sigma = \sqrt{2\pi} j_{01}^2 J_1(j_{01}) = 7,525\,716\dots, \quad (1.153)$$

siehe (1.141), und mit (1.152) folgt

$$\frac{\bar{M}_f}{4\pi\bar{b}} = \frac{j_{01} J_1(j_{01})}{2} = 0,624\,229\dots \quad (1.154)$$

Die erste Ordnung: σ^1 In dieser Ordnung werden die Größen $\mu_{10}(\bar{r})$, $\mu_{11}(\bar{r})$, β_{10} , β_{11} und Ω_2 bestimmt. Aus der Gleichung (1.27) folgen die Differentialgleichungen

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{10} + 2\pi\mu_{10} = 0 \quad (1.155)$$

und

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{11} + \left(2\pi - \frac{1}{\bar{r}^2} \right) \mu_{11} = \frac{1}{\bar{a}} \frac{d\mu_{00}}{d\bar{r}}. \quad (1.156)$$

Wenn man in Übereinstimmung mit der Wahl $\mu(0, \chi) = \mu_z$ nur Lösungen sucht, die am „Punkt“ $\bar{r} = 0$ verschwinden, so findet man

$$\mu_{10} = 0 \quad (1.157)$$

und

$$\mu_{11} = C_3 J_1 + \frac{1}{2j_{01}} \left(\sqrt{2\pi\bar{r}} J_0 - J_1 \right), \quad (1.158)$$

wobei das Argument der Bessel-Funktionen, wenn nicht anders gesagt, immer $\sqrt{2\pi\bar{r}}$ ist. Die Forderung, dass die Massendichte auf der Oberfläche verschwindet, ergibt

$$\beta_{10} = 0 \quad (1.159)$$

und verknüpft die Konstante C_3 mit der Oberflächenfunktion

$$C_3 = \frac{1 + 2j_{01}^2 \beta_{11}}{2j_{01}}. \quad (1.160)$$

Die Konstante β_{11} ist durch (1.4) bestimmt:

$$\beta_{11} = \frac{4 - j_{01}^2}{4j_{01}^2} = -0,077\,084\dots \quad (1.161)$$

Mit Gleichung (1.14) folgt

$$\Omega_2 = \frac{2J_1(j_{01})}{j_{01}}(\Lambda + 1) = (\Lambda + 1)0,431\,754\dots \quad (1.162)$$

Die analytischen Ausdrücke (1.152), (1.161) und (1.162) bestätigen die numerisch bestimmten Werte für $n = 1$ aus Tab. 1.5.

Die zweite Ordnung: σ^2 In zweiter Ordnung werden die Größen $\mu_{20}(\bar{r})$, $\mu_{21}(\bar{r})$, $\mu_{22}(\bar{r})$, β_{20} , β_{21} , β_{22} und Ω_3 bestimmt. Die Differentialgleichungen für die Koeffizienten der Massendichte sind

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{20} + 2\pi\mu_{20} = \pi\Omega_2 + \frac{1}{2\bar{a}} \left(\frac{d\mu_{11}}{d\bar{r}} - \frac{\mu_{11}}{\bar{r}} \right) + \frac{\bar{r}}{2\bar{a}^2} \frac{d\mu_{00}}{d\bar{r}}, \quad (1.163)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{21} + \left(2\pi - \frac{1}{\bar{r}^2} \right) \mu_{21} - \frac{1}{\bar{a}} \frac{d\mu_{10}}{d\bar{r}} = 0 \quad (1.164)$$

und

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{22} + \left(2\pi - \frac{4}{\bar{r}^2} \right) \mu_{22} = \frac{1}{2\bar{a}} \left(\frac{d\mu_{11}}{d\bar{r}} - \frac{\mu_{11}}{\bar{r}} \right) + \frac{\bar{r}}{2\bar{a}^2} \frac{d\mu_{00}}{d\bar{r}}. \quad (1.165)$$

Die bei $\bar{r} = 0$ verschwindenden Lösungen sind

$$\mu_{20} = \frac{\Omega_2}{2} (1 - J_0) + \frac{1}{8} \left[\frac{3\pi\bar{r}^2}{j_{01}^2} J_0 + \sqrt{2\pi\bar{r}} \left(\frac{1}{j_{01}^2} - \frac{1}{2} \right) J_1 \right], \quad (1.166)$$

$$\mu_{21} = C_4 J_1 \quad (1.167)$$

und

$$\mu_{22} = C_5 J_2 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{5}{j_{01}^2} + \frac{3\pi\bar{r}^2}{2j_{01}^2} - \frac{1}{2} \right) J_2 + \frac{\sqrt{\pi\bar{r}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{5}{j_{01}^2} - \frac{1}{2} \right) J_1 \right]. \quad (1.168)$$

Die Konstanten C_4 und C_5 können durch $\mu(r_{\text{Ob}}(\chi), \chi) = 0$ mit den Koeffizienten der Oberflächenfunktion verknüpft werden, indem man die Koeffizienten von $\cos \chi$ und $\cos 2\chi$ betrachtet. Das Ergebnis ist

$$C_4 = j_{01} \beta_{21} \quad (1.169)$$

und

$$C_5 = \frac{1}{2} \left(-j_{01}^2 \beta_{22} - \frac{j_{01}^2}{64} + \frac{3}{8} - \frac{11}{4j_{01}^2} \right). \quad (1.170)$$

Fordert man das Gleiche für den Koeffizient von $\cos 0\chi$, erhält man

$$\beta_{20} = -\frac{4}{j_{01}^4} + \frac{\Lambda + 1}{j_{01}^2} - \frac{1}{64}. \quad (1.171)$$

Aus Gleichung (1.4) folgt

$$\beta_{21} = 0, \quad (1.172)$$

und somit

$$\mu_{21} = 0. \quad (1.173)$$

Die Werte für die verbleibenden Konstanten ergeben sich aus (1.14) zu

$$\Omega_3 = 0 \quad (1.174)$$

und

$$\beta_{22} = \frac{1}{4j_{01}^4} + \frac{5(\Lambda + 3)}{2j_{01}^2} + \frac{1}{64}. \quad (1.175)$$

Die dritte Ordnung: σ^3 Die dritte Ordnung ist die höchste Ordnung, die berechnet wurde, aber das Iterationsschema kann prinzipiell zu beliebiger Ordnung durchgeführt werden, vorausgesetzt, man kann die auftretenden Differentialgleichungen und Integrale lösen. Die Differentialgleichungen, die in dieser Ordnung auftreten, sind

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{30} + 2\pi \mu_{30} = 0, \quad (1.176)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{31} + \left(2\pi - \frac{1}{\bar{r}^2} \right) \mu_{31} = \\ & \frac{3\bar{r}^2}{4\bar{a}^3} \frac{d\mu_{00}}{d\bar{r}} + \frac{3}{4\bar{a}^2} \left(\bar{r} \frac{d}{d\bar{r}} + 1 \right) \mu_{11} + \frac{1}{\bar{a}} \left[\frac{d\mu_{20}}{d\bar{r}} + \left(\frac{1}{2} \frac{d}{d\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \mu_{22} \right], \end{aligned} \quad (1.177)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{32} + 2 \left(\pi - \frac{2}{\bar{r}^2} \right) \mu_{32} = 0 \quad (1.178)$$

und

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \mu_{33} + \left(2\pi - \frac{9}{\bar{r}^2} \right) \mu_{33} = \\ & \frac{\bar{r}^2}{4\bar{a}^3} \frac{d\mu_{00}}{d\bar{r}} + \frac{1}{4\bar{a}^2} \left(\bar{r} \frac{d}{d\bar{r}} - 1 \right) \mu_{11} + \frac{1}{\bar{a}} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} \right) \mu_{22}. \end{aligned} \quad (1.179)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen mit $\mu_{qk}(0) = 0$ sind

$$\mu_{30} = 0, \quad (1.180)$$

$$\begin{aligned} \mu_{31} = & \left[C_6 - \frac{(\Lambda + 1) J_1(j_{01})}{2j_{01}^2} - \frac{9}{64} \frac{\pi (j_{01}^2 - 8) \bar{r}^2}{j_{01}^3} - \frac{j_{01}^4 + 16j_{01}^2(5\Lambda + 4) - 16}{256j_{01}^3} \right] J_1 + \\ & \left[\frac{\sqrt{\pi} (\Lambda + 1) J_1(j_{01}) \bar{r}}{\sqrt{2}j_{01}^2} - \frac{15}{32} \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}\bar{r}^3}{j_{01}^3} + \frac{\sqrt{2\pi} (j_{01}^4 + 16j_{01}^2(5\Lambda + 4) - 16) \bar{r}}{256j_{01}^3} \right] J_2, \end{aligned} \quad (1.181)$$

$$\mu_{32} = C_7 J_2 \quad (1.182)$$

und

$$\begin{aligned} \mu_{33} = & \frac{\pi \bar{r}^2 (16j_{01}^2 (5\Lambda + 2) - 40\pi \bar{r}^2 + 272 + j_{01}^4)}{512j_{01}^3} J_1 + \\ & \left[C_8 - \frac{5\pi^2 \bar{r}^4}{64j_{01}^3} + \frac{\pi (j_{01}^4 + 8j_{01}^2 (10\Lambda + 7) + 16) \bar{r}^2}{512j_{01}^3} - \frac{3 (j_{01}^4 + 16j_{01}^2 (5\Lambda + 3) + 208)}{256j_{01}^3} \right] J_3. \end{aligned} \quad (1.183)$$

Die Konstanten β_{30} , C_6 , C_7 und C_8 werden durch die Forderung $\mu(r_{\text{Ob}}(\chi), \chi) = 0$ bestimmt. Aus den Fourier-Koeffizienten von $\cos 0\chi$, $\cos \chi$, $\cos 2\chi$ und $\cos 3\chi$ folgt

$$\beta_{30} = 0, \quad (1.184)$$

$$\begin{aligned} C_6 = & \left(\frac{\Lambda + 1}{4} - \frac{3(\Lambda + 1)}{2j_{01}^2} \right) J_1(j_{01}) - \frac{j_{01}^3}{512} + \\ & j_{01} \left(\frac{5}{32}\Lambda + \beta_{31} + \frac{39}{256} \right) - \frac{14\Lambda + 9}{32j_{01}} + \frac{40\Lambda + 37}{16j_{01}^3}, \end{aligned} \quad (1.185)$$

$$C_7 = 0 \quad (1.186)$$

und

$$\begin{aligned} C_8 = & \frac{1}{j_{01}^2 - 8} \left[-\frac{j_{01}^5}{1536} - \left(\frac{5}{32}\Lambda + \beta_{33} + \frac{77}{768} \right) j_{01}^3 + \right. \\ & \left. \left(\frac{35}{16}\Lambda + \frac{11}{8} \right) j_{01} - \frac{1}{j_{01}} \left(10\Lambda + \frac{181}{48} \right) - \frac{119}{6j_{01}^3} \right]. \end{aligned} \quad (1.187)$$

Gleichung (1.4) ergibt

$$\beta_{31} = \frac{9}{32}\Lambda + \frac{31}{128} - \frac{1}{j_{01}^2} \left(\frac{13}{8}\Lambda + \frac{5}{16} \right) - \frac{1}{j_{01}^4} \left(\frac{5}{2}\Lambda + 9 \right) \quad (1.188)$$

und (1.14) ergibt

$$\beta_{32} = 0, \quad (1.189)$$

$$\Omega_4 = -2 \frac{(\Lambda + 1)^2}{j_{01}^2} J_1(j_{01})^2 + \left[\frac{1}{32} (\Lambda + 1) j_{01} + \frac{1}{j_{01}} \left(\Lambda^2 + \frac{3}{8} \Lambda - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{j_{01}^3} \left(\frac{11}{2} \Lambda + \frac{17}{4} \right) \right] J_1(j_{01}) \quad (1.190)$$

und

$$\beta_{33} = \frac{5}{64} - \frac{1}{8j_{01}^2} (5\Lambda + 9) + \frac{1}{j_{01}^4} \left(\frac{5}{2} \Lambda + 2 \right). \quad (1.191)$$

Physikalische Parameter in dritter Ordnung In Abb. 1.12 ist für verschiedene Radienverhältnisse die Gestalt der Ringe zur dritten Ordnung im Vergleich mit numerischen Ergebnissen dargestellt. Für Ringe mit $A \gtrsim 0,5$ sind die numerischen Kurven kaum von jenen zur dritten Ordnung zu unterscheiden. Numerische Rechnungen zeigen, dass mit steigendem Radienverhältnis die Oberfläche immer spitzer wird, bis schließlich beim Radienverhältnis $A = 0,253\,22\dots$ der Ring an der *Massenabwurfsgrenze* (engl. *mass-shedding limit*) ist. Für solch einen Ring ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen am „Äquator“ gerade die erste kosmische Geschwindigkeit. Das heißt, die Gravitationskraft wird allein von der Zentrifugalkraft kompensiert, und der Druckgradient verschwindet. Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze besitzen eine „Spitze“^{25,26} am „Äquator“. Die Oberfläche dieses Rings wird mit so wenigen Gliedern nicht gut durch die Fourier-Reihe beschrieben.

Benutzt man die Ergebnisse der letzten Abschnitte, dann kann man verschiedene physikalische Größen berechnen. Damit kann man die Beziehung (1.55) und die Virialidentität (1.47) verifizieren. In dritter Ordnung findet man

$$\bar{M} = \frac{\sqrt{2\pi} j_{01}^2 J_1(j_{01})}{\sigma} + \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{64} (j_{01}^4 + 28j_{01}^2 + 32j_{01}^2 \Lambda - 16) J_1(j_{01}) - \sqrt{2\pi} j_{01} (\Lambda + 1) J_1(j_{01})^2 \right] \sigma + o(\sigma), \quad (1.192)$$

²⁵Eigentlich ist es eine Kante, die im Querschnitt als Spitze erscheint.

²⁶Man kann leicht zeigen, dass Gleichgewichtskonfigurationen mit einer „Spitze“ an der Massenabwurfsgrenze liegen müssen. Die umgekehrte Aussage, nämlich dass Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze eine „Spitze“ haben, ist in [65] bewiesen. Dabei wurde lediglich vorausgesetzt, dass im oberen Halbraum ($z \geq 0$) der Druck mit steigenden Werten von z nicht anwächst.

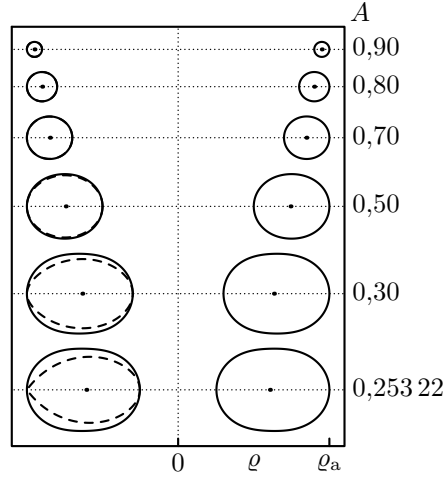


Abbildung 1.12: Querschnitte von polytropen Ringen ($n = 1$) für verschiedene Radienverhältnisse in dritter Ordnung (durchgezogene Linie) verglichen mit numerischen Ergebnissen (gestrichelte Linie). Beim Radienverhältnis $A = 0,253\,22 \dots$ befindet sich der numerische Ring an der Massenabwurfsgrenze, wie man auch an der „Spitze“ der Oberfläche sieht.

$$\bar{J} = \sqrt{\frac{J_1(j_{01})(\Lambda + 1)}{j_{01}}} J_1(j_{01}) j_{01}^2 \left[\frac{j_{01}^2}{\sigma^2} - \frac{3}{2} (\Lambda + 1) j_{01} J_1(j_{01}) + \right. \\ \left. \frac{3j_{01}^4(\Lambda + 1) + j_{01}^2(96\Lambda^2 + 324\Lambda + 232) - 624\Lambda - 664}{128(\Lambda + 1)} \right] + o(\sigma^0), \quad (1.193)$$

$$\bar{P} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} j_{01} J_1(j_{01})^2 \left\{ \frac{j_{01}^2}{\sigma} + \frac{1}{320} \left[-640 j_{01} (\Lambda + 1) J_1(j_{01}) + \right. \right. \\ \left. \left. 10 (j_{01}^4 - 8j_{01}^2 + 128\Lambda + 136) \right] \sigma \right\} + o(\sigma), \quad (1.194)$$

$$\bar{T} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} J_1(j_{01})^2 j_{01} \left\{ \frac{1}{\sigma} (\Lambda + 1) j_{01}^2 + \left[-2 (\Lambda + 1)^2 J_1(j_{01}) j_{01} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{32} (j_{01}^4(\Lambda + 1) + 2j_{01}^2(8\Lambda + 9)(2\Lambda + 3) - 112\Lambda - 132) \right] \sigma \right\} + o(\sigma) \quad (1.195)$$

und

$$\bar{W} = \sqrt{2\pi} j_{01} J_1(j_{01})^2 \left\{ -\frac{j_{01}^2}{2\sigma} (2\Lambda + 5) + \left[j_{01} (2\Lambda + 5) (\Lambda + 1) J_1(j_{01}) - \frac{1}{64} \left(j_{01}^4 (2\Lambda + 5) + 4j_{01}^2 (16\Lambda^2 + 42\Lambda + 21) + 160\Lambda + 144 \right) \right] \sigma \right\} + o(\sigma). \quad (1.196)$$

Bei der Herleitung der Formeln für \bar{P} und \bar{W} wurde die Identität

$$20 {}_2F_3\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 2, \frac{5}{2}; -j_{01}^2\right) = 3j_{01}^2 {}_2F_3\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}; 3, 3, \frac{7}{2}; -j_{01}^2\right) \quad (1.197)$$

für die hypergeometrische Funktion

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdot (a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdot (b_2)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (1.198)$$

benutzt, wobei

$$(a)_k := a(a+1) \cdots (a+k-1), \quad (a)_0 := 1 \quad (1.199)$$

das Pochhammer-Symbol ist. Einen Beweis der Identität (1.197) findet man im Anhang C.

Die Genauigkeit der obigen Ausdrücke kann man bestimmen, indem man die daraus resultierenden Werte mit präzisen numerischen Werten vergleicht. In den Abb. 1.13–1.15 sind Ergebnisse in erster und dritter Ordnung zusammen mit numerischen Ergebnissen dargestellt. Unter den Kurven in erster und dritter Ordnung ist hierbei Folgendes zu verstehen: Man nimmt die Ausdrücke für $\bar{\varrho}_i$, $\bar{\varrho}_a$, $\bar{\Omega}^2$, \bar{M} und \bar{J} in erster bzw. dritter Ordnung, setzt dort einen numerischen Wert für σ ein und berechnet aus diesen Größen die gewünschten Ausdrücke.²⁷ In allen drei Abbildungen zeigt sich, dass die dritte Ordnung eine deutliche Verbesserung gegenüber der ersten Ordnung liefert, jedoch ist für Ringe nahe der Massenabwurfsgrenze die Genauigkeit auch in dritter Ordnung nicht besonders gut.

²⁷Alternativ hätte man die gesamten Ausdrücke (statt nur deren Teile) zur ersten bzw. dritten Ordnung in σ berechnen können. So käme man zu leicht abweichenden Ergebnissen. Die Differenz ist jeweils nur ein Term höherer Ordnung in σ .

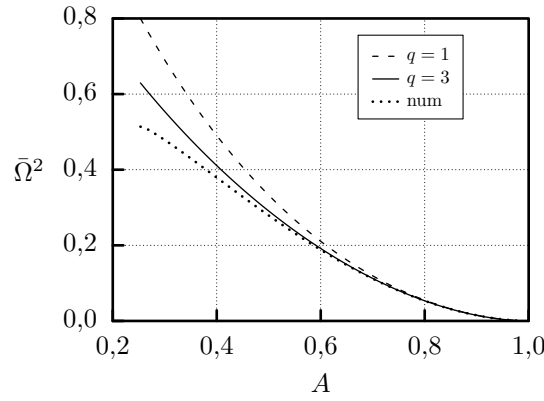


Abbildung 1.13: Die dimensionslose quadrierte Winkelgeschwindigkeit $\bar{\Omega}^2$ als Funktion des Radienverhältnisses A für polytrope Ringe mit $n = 1$ in erster und dritter Ordnung verglichen mit dem numerischen Ergebnis.

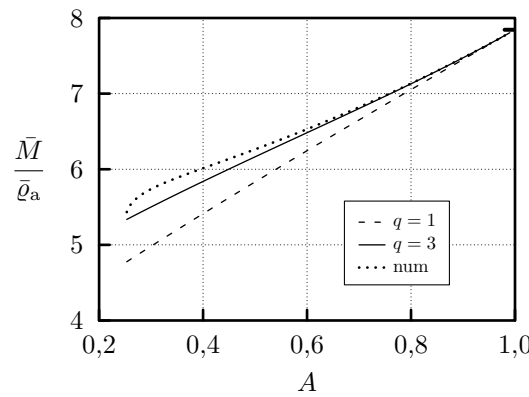


Abbildung 1.14: Die dimensionslose Masse \bar{M} geteilt durch den dimensionslosen äußeren Radius $\bar{\varrho}_a$ als Funktion des Radienverhältnisses A für polytrope Ringe mit $n = 1$ in erster und dritter Ordnung verglichen mit dem numerischen Ergebnis. Für den Grenzfall dünner Ringe gilt $\bar{M}/\bar{\varrho}_a \rightarrow 2\pi j_{01} J_1(j_{01}) = 7,84 \dots$, siehe (1.192) und (1.152). Dieser Wert ist im Diagramm eingetragen.

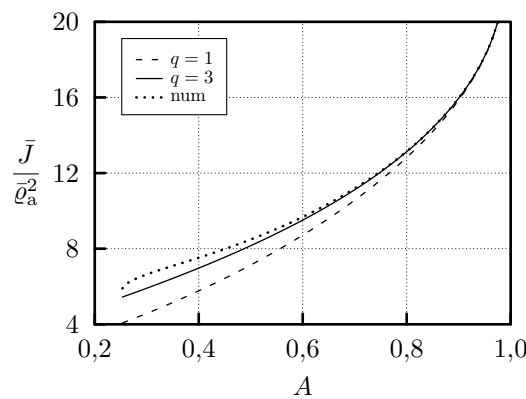


Abbildung 1.15: Der dimensionslose Drehimpuls \bar{J} geteilt durch das Quadrat des dimensionslosen äußeren Radius $\bar{\varrho}_a^2$ als Funktion des Radienverhältnisses A für polytrope Ringe mit $n = 1$ in erster und dritter Ordnung verglichen mit dem numerischen Ergebnis. Für $A \rightarrow 1$ divergiert $\bar{J}/\bar{\varrho}_a^2$ logarithmisch.

1.1.6 Der Grenzfall unendlichen Polytropenindex

Für $n \rightarrow \infty$ geht die Polytropengleichung (1.111) in die Gleichung

$$\boxed{p = K\mu} \quad (1.200)$$

über. Diese Gleichung wird oft als „*isotherme*“ *Zustandsgleichung* bezeichnet, weil sie für ein ideales Gas bei konstanter Temperatur gilt. Die Definition (1.11) der Druckfunktion führt damit auf

$$h = h_z + K \ln \frac{\mu}{\mu_z}. \quad (1.201)$$

Dabei ist h_z der Wert von h am „Punkt“ $r = 0$. In führender Ordnung ergibt das die Gleichung

$$\pi G \mu_z a^2 h_{00} - h_z = K \ln \mu_{00}. \quad (1.202)$$

Damit wird die führende Ordnung der Gleichung (1.27) zu

$$\boxed{\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \frac{d}{d\bar{r}} \ln \mu_{00} \right) + 4\pi \mu_{00} = 0,} \quad (1.203)$$

siehe auch (1.51), wobei hier

$$\bar{r} = r \sqrt{\frac{G\mu_z}{K}} \quad (1.204)$$

ist, wie sich aus (1.115) im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ ergibt. Die Gleichung (1.203) ist eine *verallgemeinerte Lane-Emden-Gleichung zweiter Gattung*²⁸, siehe [31]. Die Lösung mit den „Anfangswerten“²⁹

$$\mu_{00}(0) = 1 \quad \text{und} \quad \left. \frac{d\mu_{00}}{d\bar{r}} \right|_{\bar{r}=0} = 0 \quad (1.205)$$

ist in [82, 62] gefunden worden und lautet

$$\mu_{00} = \left(1 + \frac{\pi}{2} \bar{r}^2 \right)^{-2}. \quad (1.206)$$

²⁸Mit den Größen $\xi := \sqrt{4\pi} \bar{r}$ und $\Theta := -\ln \mu_{00}$ lässt sich die Gleichung in die Standardform $\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \right) \Theta = e^{-\Theta}$ mit den „Anfangswerten“ $\Theta(0) = 0$ und $\frac{d}{d\xi} \Theta|_{\xi=0} = 0$ bringen.

²⁹Der Potenzreihenansatz $\mu_{00} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \bar{r}^i$ ergibt $c_1 = 0$.

Die Massendichte und somit auch der Druck fallen erst für $\bar{r} \rightarrow \infty$ auf null ab, d. h. $\bar{a} \rightarrow \infty$. Das bedeutet, dass die „isothermen“ Ringe keine (akzeptablen) Gleichgewichtsfiguren darstellen. Diese Lösungen können nur als Grenzfall verstanden werden, etwa als Grenzfall polytroper Ringe mit unendlichem Polytropenindex. Insbesondere haben auch $\bar{b} = \bar{a}/\sigma$ und

$$\bar{M}_f = 4\pi^2 \bar{b} \int_0^\infty \mu_{00} \bar{r} d\bar{r} = 4\pi \bar{b}, \quad (1.207)$$

siehe (1.52), keine endlichen Werte. Hingegen bleibt das Verhältnis \bar{M}_f/\bar{b} endlich. Das Ergebnis (1.207) kann man auch direkt aus der Gleichung (1.55) ablesen, wenn man berücksichtigt, dass für „isotherme“ Ringe $\bar{M} = \bar{P}$ gilt, was sofort aus (1.200) folgt.

Aus (1.138) folgt mit (1.207), dass die zur spezifischen kinetischen Energie in führender Ordnung T_f/M_f proportionale Größe $\bar{a}^2 \Omega_2$ bei fixiertem Λ für $n \rightarrow \infty$ divergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \bar{a}^2 \Omega_2}{n + 4\Lambda} = 1. \quad (1.208)$$

Durch einen Vergleich mit „isothermen“ Zylindern konnte Ostriker das asymptotische Verhalten

$$\bar{a} \left. \frac{d\tilde{\mu}_{00}}{d\bar{r}} \right|_{\bar{r}=\bar{a}} \rightarrow -\frac{4}{n+3} \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty \quad (1.209)$$

und

$$\bar{a} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{(n+3)/4} \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty \quad (1.210)$$

von polytrophen Zylindern ermitteln, siehe Gleichung (70) und (74) in [62]. Insbesondere folgt damit aus (1.141) im Grenzfall dünner polytroper Ringe

$$\bar{M}_f \sigma \rightarrow 4\sqrt{2\pi} \frac{n+1}{n+3} e^{(n+3)/4} \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty \quad (1.211)$$

und

$$\frac{\bar{M}_f}{4\pi \bar{b}} \rightarrow \frac{n+1}{n+3} \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.212)$$

Dieses asymptotische Verhalten und insbesondere der Grenzwert $\bar{M}_f/(4\pi \bar{b}) = 1$ für $n \rightarrow \infty$, siehe (1.207), wurden bereits in Abb. 1.11 dargestellt. Für Ω_2 folgt aus (1.138)

Tabelle 1.6: Das Radienverhältnis A_{MA} des Rings an der Massenabwurfsgrenze für verschiedene Polytropenindizes n . Für Ringe mit $n \lesssim 0,36$ gibt es diese Grenze nicht, beliebig kleine Radienverhältnisse sind möglich, und bei $A = 0$ gibt es einen Übergang zu sphäroidalen Konfigurationen.

n	0,36	1	2	3	4	5	6	7	8
A_{MA}	0	0,25	0,37	0,44	0,49	0,53	0,56	0,58	0,60

mit (1.210) und (1.211)

$$\Omega_2 \rightarrow \frac{n+1}{n+3} e^{-(n+3)/2} \left(\Lambda + \frac{n+3}{4} \right) \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.213)$$

was konsistent mit (1.208) ist.

Aus der Definition (1.129) von g folgt

$$|g| = \frac{\int_0^1 \mu_{00} y^3 dy}{4 \int_0^1 \mu_{00} y dy} \leq \frac{\int_0^1 \mu_{00} y^2 dy}{4 \int_0^1 \mu_{00} y dy} = \frac{\int_0^{\bar{a}} \mu_{00} \bar{r}^2 d\bar{r}}{4\bar{a} \int_0^{\bar{a}} \mu_{00} \bar{r} d\bar{r}}. \quad (1.214)$$

Mit (1.206) findet man für die beiden auftretenden Integrale endliche Werte und kann wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a} = \infty$ schließen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g = 0 \quad (1.215)$$

gilt. Mit (1.137) folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\beta_{11} + \frac{n}{8} \right) = \frac{1}{8}. \quad (1.216)$$

Das asymptotische Verhalten (1.210), (1.211), (1.213) und (1.216) wurde bereits durch die Werte für $n \leq 50$ aus Tab. 1.5 angedeutet.

Die Gleichung (1.216) zeigt, dass $|\beta_{11}|$ für $n \rightarrow \infty$ divergiert. Also schrumpft für $n \rightarrow \infty$ der Wertebereich für σ , in dem die erste Ordnung eine nicht divergente (d. h. endliche) Korrektur zur Oberflächenfunktion der führenden Ordnung liefert, auf den Punkt $\sigma = 0$ zusammen. Vermutlich müssen also polytrophe Ringe im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ unendlich dünn ($A \rightarrow 1$) sein. Tatsächlich zeigen numerische Ergebnisse für polytrophe Ringe, dass das Radienverhältnis an der Massenabwurfsgrenze A_{MA} mit steigendem n anwächst, siehe Tab. 1.6³⁰ und auch Abb. 2.1. Das würde bedeuten, dass für die zu Abb. 1.12 analoge Sequenz für „isotherme“ Ringe vom Grenzfall dünner Ringe mit kreis-

³⁰Leider können hier nur Ergebnisse bis $n = 8$ gezeigt werden, da mit anwachsendem n die numerische Behandlung immer schwieriger wird.

förmigem Querschnitt bis zum Ring an der Massenabwurfsgrenze das Radienverhältnis bei $A \rightarrow 1$ bleibt. Im Rahmen des Roche-Modells (Kapitel 1.2) lässt sich tatsächlich eine derartige Sequenz unendlich dünner Ringe finden, siehe Abb. 1.16, und als Sequenz „isothermer“ Ringe interpretieren.

1.1.7 Abschließende Bemerkungen

Dyson konnte zeigen, dass die voneinander abweichenden Ergebnisse von Kowalewsky und Poincaré für homogene Ringe in zweiter Ordnung beide fehlerhaft sind. Aber auch sein Ergebnis enthält Fehler, wie im Anhang B dargelegt ist, jedoch erst in vierter Ordnung. Daher scheint es besonders ratsam zu sein, die Lösungen auf Korrektheit zu überprüfen. Zum einen wurde kontrolliert, dass die Übergangsbedingung $\nabla U^i|_{\text{Ob}} = \nabla U^a|_{\text{Ob}}$ in allen relevanten Ordnungen in σ erfüllt ist, und zum anderen, dass die Virialidentität (1.47) in allen relevanten Ordnungen erfüllt ist.³¹

Bei der Interpretation der Ergebnisse für den Grenzfall dünner Ringe muss man sorgfältig zwischen dimensionslosen und dimensionsbehafteten Größen unterscheiden. So könnte man fälschlicherweise denken, dass die quadrierte Winkelgeschwindigkeit für $\sigma \rightarrow 0$ wie $\sigma^2 \ln \sigma$ verschwindet. Das ist zwar für die dimensionslose Größe $\Omega^2/(G\mu_z)$ wahr, nicht aber für die quadrierte Winkelgeschwindigkeit selbst. Hält man bei diesem Grenzübergang die „räumliche Ausdehnung“ b und die Masse M des Rings fest, dann schrumpft der Querschnitt zu einem Punkt zusammen ($a = \sigma b$). Mit (1.52) folgt $\mu_z \propto \sigma^{-2}$ und somit $\Omega^2 \propto \ln \sigma$, was bedeutet, dass Ω^2 und folglich auch die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens beliebig groß werden.

Vom Standpunkt der Allgemeinen Relativitätstheorie bildet die Newtonsche Theorie eine gute Näherung, falls bestimmte Bedingungen erfüllt sind. Zum einen müssen typische Geschwindigkeiten klein sein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c , und zum anderen muss $|U| \ll c^2$ gelten. Man sah jedoch, dass bei festgehaltener Ausdehnung und Masse die Geschwindigkeiten im Grenzfall dünner Ringe unbegrenzt anwachsen. Das Gleiche gilt auch für U_{Ob} , siehe (1.130). Das bedeutet, dass die Newtonsche Gravitationstheorie nicht geeignet ist, unendlich dünne Ringe zu beschreiben. Man kann nämlich nicht erwarten, dass solche divergenten Newtonschen Lösungen eine gute Näherung einer relativistischen Lösung sind.

Es ist bemerkenswert, dass die Entwicklung um den singulären Punkt $\sigma = 0$ so erfolgreich ist.

³¹Die Übergangsbedingung $U^i|_{\text{Ob}} = U^a|_{\text{Ob}}$ und die Gleichheit der Masse gemäß (1.46) (Fernfeld) mit der Masse nach (1.41) (Integral) liefern keine unabhängigen Tests. Beides wurde explizit gefordert, letzteres in der Definition von A_1 , siehe Gleichung (1.30) und Fußnote 9.

1.2 Ein Roche-Modell für Ringe

1.2.1 Einleitung

Ein starr rotierender Stern mit hinreichend „weicher“ Zustandsgleichung kann näherungsweise mittels des Roche-Modells [76] beschrieben werden. In diesem Modell wird die Materie als Testflüssigkeit im Potential einer Punktmasse behandelt. Das heißt, man betrachtet den Stern so, als wäre dessen gesamte Masse im Zentrum konzentriert. Solche Roche-Modelle, insbesondere für Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze, sind in [38, 86, 77] untersucht worden. Für polytrope Materie mit $n \gtrsim 2,5$ liefert das Roche-Modell Ergebnisse, die um weniger als 1 % von den wahren Werten abweichen, siehe [56]. Während die meisten bekannten strengen Lösungen von Gleichgewichtsfiguren homogene Körper beschreiben (Maclaurin-Ellipsoide, Jacobi-Ellipsoide usw.), ist das Roche-Modell auf inhomogene Materie anwendbar und gerade deswegen sehr nützlich.

Im Folgenden wird die grundlegende Idee des Roche-Modells auf Ringe angewandt. Dabei wird die Testflüssigkeit nicht im Feld einer Punktmasse, sondern im Feld einer kreisförmigen Massenlinie mit konstanter Linienmassendichte betrachtet. Neben der Masse ist hier der Radius des Kreises vorzugeben.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind in [36] veröffentlicht.

1.2.2 Das Roche-Modell mit einer ringförmigen Quelle

Grundgleichungen

Das Potential einer kreisförmigen Massenlinie, zentriert um die Achse, mit Masse M und Radius b ist

$$\boxed{U = -\frac{GM}{\pi} I_1,} \quad (1.217)$$

siehe (1.32) und (1.34). In diesem vorgegebenen Potential wird nun die Testflüssigkeit untersucht, die starr rotieren soll. Wie bei den selbstgravitierenden Ringen betrachtet man dazu die Euler-Gleichung (1.8) und insbesondere die daraus resultierende Bernoulli-Gleichung (1.12). Der einzige Unterschied liegt darin, dass dort simultan zur Euler-Gleichung die Feldgleichung für das Potential (1.5) bzw. (1.6) zu lösen war, hier jedoch einfach das Potential (1.217) verwendet wird.

Die Oberflächenbedingung (1.14) liefert bei Vorgabe von M , b , Ω^2 und ϱ_a implizite Ausdrücke für die Oberflächenfunktion $r_{\text{Ob}} = r_{\text{Ob}}(\chi)$ bzw. $z_{\text{Ob}} = z_{\text{Ob}}(\varrho)$ und somit

für das Radienverhältnis A . Völlig analog kann die Bernoulli-Gleichung (1.12) benutzt werden, um Flächen konstanter Druckfunktion h zu bestimmen.

Durch die Einführung von dimensionslosen Größen

$$\frac{r'}{r} = \frac{b'}{b} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{z'}{z} = \frac{1}{\varrho_a}, \quad \frac{\Omega'^2}{\Omega^2} = \frac{\varrho_a^3}{GM}, \quad \frac{U'}{U} = \frac{V'_0}{V_0} = \frac{h'}{h} = \frac{\varrho_a}{GM} \quad (1.218)$$

lässt sich die Bernoulli-Gleichung vereinfachen – GM kürzt sich heraus. Es gilt $\varrho'_i = A$ und $\varrho'_a = 1$. Abgesehen von zwei Skalierungsparametern (etwa M und ϱ_a) ist die Vorgabe von zwei Größen für die Beschreibung eines Rings notwendig (etwa b' und Ω'^2).

Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze

Von besonderem Interesse sind Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze. Wie bereits erwähnt, sind in diesem Grenzfall am „Äquator“ Gravitationskraft und Zentrifugalkraft gleich groß. Für die quadrierte Winkelgeschwindigkeit an der Massenabwurfsgrenze folgt

$$\Omega_{\text{MA}}'^2 = \left. \frac{\partial U'}{\partial \varrho'} \right|_{\varrho'=1, z'=0}. \quad (1.219)$$

Mit dem Potential (1.217) ergibt sich

$$\Omega_{\text{MA}}'^2 = \frac{2\mathcal{E}(b')}{\pi(1 - b'^2)}. \quad (1.220)$$

Im Gegensatz zum allgemeinen Fall ist hier nur ein Parameter frei wählbar. Der zweite ist bereits durch die Gleichung (1.219) festgelegt.

Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze besitzen eine „Spitze“. Im Folgenden soll der zugehörige Winkel berechnet werden. Dazu betrachtet man das „Rotationspotential“ V , das durch die Gleichung (1.15) eingeführt wurde. Auf der Oberfläche des Rings ist V konstant, siehe (1.14). Entlang der Oberfläche gilt also

$$0 = \frac{d^2 V}{d\varrho^2} = V_{,\varrho\varrho} + 2V_{,\varrho z} \frac{dz_{\text{Ob}}}{d\varrho} + V_{,zz} \left(\frac{dz_{\text{Ob}}}{d\varrho} \right)^2 + V_{,z} \frac{d^2 z_{\text{Ob}}}{d\varrho^2}, \quad (1.221)$$

wobei die Kommas partielle Differentiation bedeuten. Wegen der Äquatorsymmetrie

verschwinden in der Äquatorebene erste Ableitungen nach z . Dies führt zu

$$\varrho = \varrho_a, z = 0: \quad \frac{dz_{\text{Ob}}(\varrho)}{d\varrho} = \sqrt{-\frac{V_{,\varrho\varrho}}{V_{,zz}}} = \sqrt{\frac{\Omega_{\text{MA}}^2 - U_{,\varrho\varrho}}{U_{,zz}}}. \quad (1.222)$$

Folglich gilt für den vollen Winkel

$$\delta := 2 \arctan \left. \frac{dz_{\text{Ob}}(\varrho)}{d\varrho} \right|_{\varrho=\varrho_a, z=0} = 2 \arctan \sqrt{\frac{\Omega_{\text{MA}}^2 - U_{,\varrho\varrho}}{U_{,zz}}} \bigg|_{\varrho=\varrho_a, z=0}, \quad (1.223)$$

was auf

$$\delta = 1 - \frac{2(1 - b'^2)\mathcal{E}(b')}{(1 - b'^2)\mathcal{K}(b') - 2\mathcal{E}(b')} \quad (1.224)$$

führt, siehe Abb. 1.19.

Gestalt der Oberfläche

Um sowohl Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze als auch den allgemeinen Fall zu behandeln, wird die quadrierte Winkelgeschwindigkeit durch

$$\Omega^2 = \alpha \Omega_{\text{MA}}^2, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (1.225)$$

parametrisiert.

Die Massenabwurfsgrenze ($\alpha = 1$) stellt eine obere Schranke für die Winkelgeschwindigkeit dar. Für beliebig kleine Werte von Ω^2 lässt sich die Gleichung (1.14) lösen. Es ergibt sich

$$V'_0 = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\alpha \mathcal{E}(b')}{1 - b'^2} + 2\mathcal{K}(b') \right], \quad (1.226)$$

wenn man die Gleichung (1.14) am Punkt ($\varrho' = \varrho'_a = 1, z' = 0$) auswertet. Für den Punkt ($\varrho' = \varrho'_1 = A, z' = 0$) folgt

$$V'_0 = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\alpha A^2 \mathcal{E}(b')}{1 - b'^2} + \frac{2}{b'} \mathcal{K}\left(\frac{A}{b'}\right) \right]. \quad (1.227)$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für V_0 liefert

$$\mathcal{K}(b') = \frac{1}{b'} \mathcal{K}\left(\frac{A}{b'}\right) - \frac{\alpha(1 - A^2)\mathcal{E}(b')}{2(1 - b'^2)}. \quad (1.228)$$

An einem beliebigen Oberflächenpunkt $(\varrho', z'_{\text{Ob}}(\varrho'))$ erhält man

$$V'_0 = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\alpha \varrho'^2 \mathcal{E}(b')}{1 - b'^2} + \frac{2}{\pi \sqrt{(b' + \varrho')^2 + z_{\text{Ob}}'^2}} \mathcal{K} \left(\frac{2\sqrt{b'\varrho'}}{\sqrt{(b' + \varrho')^2 + z_{\text{Ob}}'^2}} \right) \right]. \quad (1.229)$$

Zusammen mit (1.226) ist das eine implizite Gleichung für die Oberfläche $z'_{\text{Ob}}(\varrho')$ bzw. $r'_{\text{Ob}}(\chi)$. Leider lässt sich die Gleichung nicht nach dieser Funktion auflösen. Es ist jedoch nicht schwierig, die Gleichung numerisch zu lösen. Darüber hinaus ist es möglich, sie im Grenzfall dünner Ringe analytisch zu lösen. Im nächsten Abschnitt wird dies gezeigt.

Die Bedingung $A \geq 0$ besagt, dass bei vorgegebenem α die Gleichung (1.228) nur für diejenigen Werte von b' erfüllt werden kann, die größer als ein bestimmter minimaler Wert sind. Es zeigt sich, dass kleinere Werte von b' keine Ringe beschreiben, sondern sphäroidale Konfigurationen. In diesem Fall müssen die Gleichungen (1.227) und (1.228) durch

$$\varrho' = 0, z' = z'_p: \quad V'_0 = -\frac{1}{\sqrt{b'^2 + z_p'^2}} \quad (1.230)$$

und

$$\mathcal{K}(b') = \frac{\pi}{2\sqrt{b'^2 + z_p'^2}} - \frac{\alpha \mathcal{E}(b')}{2(1 - b'^2)} \quad (1.231)$$

ersetzt werden. Dabei ist $z'_p = z_p/\varrho_a$ der dimensionslose Polarradius oder in anderen Worten das Verhältnis vom Polar- zum Äquatorradius. Der Übergang von sphäroidaler zu toroidaler Topologie liegt gerade bei $z'_p = 0$ oder anders gesagt bei $A = 0$. Im Grenzfall $b' \rightarrow 0$ geht das Potential (1.217) in jenes einer Punktmasse über, und man ist wieder beim gewöhnlichen Roche-Modell mit punktförmiger Quelle für sphäroidale Konfigurationen, siehe Anhang E.

Grenzfall dünner Ringe

Im Grenzfall dünner Ringe $A \rightarrow 1$ geht auch b' gegen 1. Entwickelt man die Oberflächenfunktion

$$r'_{\text{Ob}}(\chi) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(\chi)(1 - b')^i \quad (1.232)$$

in diesem Grenzfall ($b' \rightarrow 1$), dann ergibt die Gleichung (1.14) in führender Ordnung

$$0 = \alpha[1 + s_1(\chi) \cos \chi] + \ln s_1(\chi). \quad (1.233)$$

Mithilfe der Lambertschen W-Funktion, welche durch die Gleichung

$$\mathcal{W}(x)e^{\mathcal{W}(x)} \equiv x \quad (1.234)$$

definiert ist, kann dies gelöst werden:

$$s_1(\chi) = e^{-\mathcal{W}(\alpha e^{-\alpha} \cos \chi) - \alpha} = \frac{\mathcal{W}(\alpha e^{-\alpha} \cos \chi)}{\alpha \cos \chi}. \quad (1.235)$$

Für $\alpha \rightarrow 0$ findet man $s_1(\chi) = 1$, was bedeutet, dass der Querschnitt für $b' \rightarrow 1$ kreisförmig wird. Für $\alpha = 1$ (und nur für diesen Wert) ist $s_1(\chi)$ an der Stelle $\chi = \pi$ nicht differenzierbar, obwohl beide einseitigen Ableitungen existieren. Es gilt

$$\lim_{\chi \uparrow \pi} \frac{ds_1(\chi)}{d\chi} = -\lim_{\chi \downarrow \pi} \frac{ds_1(\chi)}{d\chi} = 1, \quad (1.236)$$

was bedeutet, dass der Winkel an diesem Punkt $\delta = 90^\circ$ ist. Dieser Winkel kann auch aus der Gleichung (1.224) im Grenzfall $b' \rightarrow 1$ bestimmt werden. Die Abb. 1.16 zeigt die Gestalt der Oberfläche für verschiedene Werte von α . Weitere Glieder $s_i(\chi)$ der Reihe

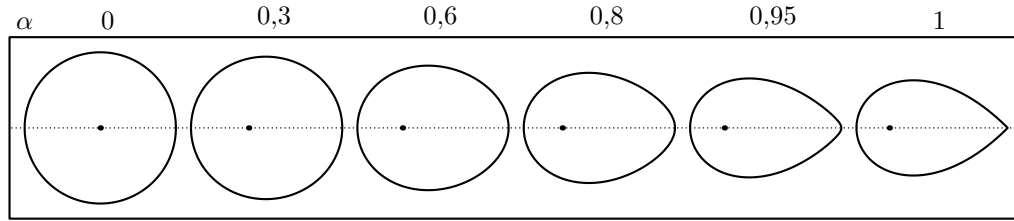


Abbildung 1.16: Querschnitte der Ringe im Grenzfall dünner Ringe so skaliert, dass die horizontale Ausdehnung jeweils den gleichen endlichen Wert hat. Die Funktion $s_1(\chi)$ ist für verschiedene Werte α in Polarkoordinaten dargestellt. Die Rotationsachse ist dabei jeweils links vom Querschnitt und unendlich weit entfernt. Die eingezeichneten Punkte markieren den Ursprung, wo sich die Quelle des Potentials befindet.

(1.232) können iterativ bestimmt werden und enthalten Potenzen von $\ln(1 - b')$.

Für die Bestimmung der Flächen $r'_{h'}(\chi)$ mit konstanter Druckfunktion h' verallgemeinert man die obige Rechnung. Analog zu (1.232) setzt man für diese Flächen im Grenzfall dünner Ringe

$$r'_{h'}(\chi) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{h'}(\chi)(1 - b')^i \quad (1.237)$$

an. Da die Druckfunktion h auf der Oberfläche verschwindet, gilt $r'_{\text{Ob}}(\chi) = r'_0(\chi)$ und

somit $s_i = t_i^0$. Die Bernoulli-Gleichung (1.12) ergibt

$$\alpha \left[1 + t_1^{h'}(\chi) \cos \chi \right] + \ln t_1^{h'}(\chi) + \pi h' = 0, \quad (1.238)$$

und es folgt

$$t_1^{h'}(\chi) = e^{-\mathcal{W}(\alpha e^{-\alpha-\pi h'} \cos \chi) - \alpha - \pi h'} = \frac{\mathcal{W}(\alpha e^{-\alpha-\pi h'} \cos \chi)}{\alpha \cos \chi}. \quad (1.239)$$

Die Funktion $t_1^{h'}(\chi)$ ist für $\alpha = 1$ und verschiedene Werte von h' in Abb. 1.17 dargestellt. Für $h' \rightarrow \infty$ findet man

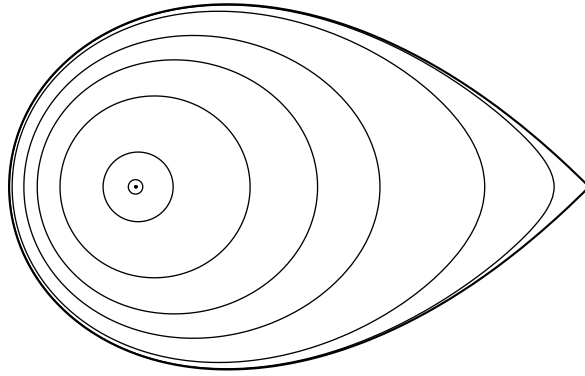


Abbildung 1.17: Flächen mit konstantem Druck und folglich konstantem h' im Grenzfall dünner Ringe an der Massenabwurfsgrenze. Für $\alpha = 1$ ist die Funktion $t_1^{h'}(\chi)$ für verschiedene Werte von h' in Polarkoordinaten dargestellt. Die Rotationsachse ist links vom Querschnitt und unendlich weit entfernt. Die gewählten Werte von h' , beginnend bei der Oberfläche und nach innen steigend, sind 0, 0,001, 0,01, 0,05, 0,1, 0,2, 0,5 und 1. Der Wert von h' divergiert am Ort der Quelle.

$$\lim_{h' \rightarrow \infty} t_1^{h'}(\chi) e^{\alpha + \pi h'} = 1. \quad (1.240)$$

Im Querschnitt betrachtet werden die Flächen mit konstantem h im Zentrum also immer kreisförmiger (siehe Abb. 1.17). Für $\alpha \rightarrow 0$ reduziert sich die Gleichung (1.238) auf

$$t_1^{h'} + \pi h' = 0, \quad (1.241)$$

was bedeutet, dass die Flächen mit konstanter Druckfunktion im Querschnitt betrachtet

konzentrische Kreise sind. In anderen Worten heißt das, dass dann die Druckfunktion³²

$$h = -\frac{GM}{b} \frac{1}{\pi} \ln t, \quad t \in (0, 1] \quad (1.242)$$

nur von der radialen Koordinate $t := r'/(1 - b')$, nicht aber vom Winkel χ abhängt.

1.2.3 Vergleich mit dem vollen Problem

Für den Vergleich zwischen dem Roche-Modell und dem vollen Problem, d. h. unter Berücksichtigung der Selbstgravitation, ist es nötig, die zu vergleichenden physikalischen Größen zu identifizieren. Während M , Ω , V_0 , A und $z_s(\varrho)$ ganz eindeutig in beiden Modellen definiert sind, besitzt die Größe b , die den Ort der Quelle im Roche-Modell beschreibt, keine eindeutige Entsprechung im vollen Problem. Man muss also eine Wahl treffen: Im vollen Problem sei b , wie bisher auch (Kapitel 1.1), durch den Ort des Massenschwerpunkts des Querschnitts bestimmt, siehe (1.4). Alternativ könnte man etwa den Ort maximaler Druckfunktion h wählen. In Abb. 1.5 hat man gesehen, dass der relative Unterschied der beiden Werte (für $q = 20$: $b' = 0,652$, $\varrho'_{\text{p,max}} = 0,636$) für den homogenen Ring mit $A = 0,3$ weniger als 3 % beträgt. In Situationen, in denen man vom Roche-Modell gute Näherungen erwarten kann (d. h. Ringe mit „weicher“ Zustandsgleichung und insbesondere $\kappa \ll 1$, siehe (1.244)), liegen die beiden Orte noch dichter aneinander.

Das Roche-Modell enthält zwei Skalierungsparameter, welche durch die eingeführten dimensionslosen Größen (1.218) bereits „eliminiert“ sind, sowie zwei physikalische Parameter. Jedoch ist das volle Problem bei gegebener Zustandsgleichung nur durch einen physikalischen Parameter und einen Skalierungsparameter bestimmt. Wenn man ein spezifisches Roche-Modell mit einer Lösung des vollen Problems vergleicht, hat man also noch Freiheiten. Zum Beispiel kann man die Parameter so wählen, dass b' und Ω' übereinstimmen, und dann V'_0 , A und die Gestalt der Oberfläche vergleichen. Oder man lässt b' und A übereinstimmen und vergleicht dann Ω' , V'_0 und die Gestalt der Oberfläche.

Antwort auf die wichtige Frage, wie gut die Ergebnisse des Roche-Modells sind, liefert der Vergleich mit numerischen Lösungen des vollen Problems. Die Tabellen 1.7 und 1.8 zeigen, wie sich die Genauigkeit des Roche-Modells mit steigendem Polytropenindex n verbessert. In Tab. 1.7 werden Ringe mit dem Radienverhältnis $A = 0,7$ und in Tab. 1.8 Ringe an der Massenabwurfsgrenze, d. h. $\alpha = 1$ für das Roche-Modell, verglichen. Der Wert von b' für das Roche-Modell wurde jeweils so gewählt, dass er mit dem entspre-

³²Man beachte, dass für den Grenzfall dünner Ringe $b/\varrho_a \rightarrow 1$ gilt.

Tabelle 1.7: Vergleich zwischen polytropen Ringen mit $A = 0,7$ und den entsprechenden Roche-Modellen mit dem gleichen Wert für b' . Δ bezeichnet die Differenz der Werte des Roche-Modells zu denen der vollen Lösung.

n	κ	b'	$\Delta\Omega/\Omega_{\text{num}}$	$\Delta V_0/V_{0\text{num}}$
1,0	$6,3 \cdot 10^{-1}$	$8,48 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$7,4 \cdot 10^{-3}$
1,5	$4,9 \cdot 10^{-1}$	$8,46 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$
3,0	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$8,42 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$
5,0	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$8,34 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
7,0	$7,2 \cdot 10^{-2}$	$8,26 \cdot 10^{-1}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$4,7 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 1.8: Vergleich zwischen polytropen Ringen an der Massenabwurfsgrenze und den entsprechenden Roche-Modellen mit dem gleichen Wert für b' . Δ bezeichnet die Differenz der Werte des Roche-Modells zu denen der vollen Lösung.

n	κ	b'	$\Delta A/A_{\text{num}}$	$\Delta\Omega/\Omega_{\text{num}}$	$\Delta\delta/\delta_{\text{num}}$	$\Delta V_0/V_{0\text{num}}$
1,0	$5,3 \cdot 10^{-1}$	$5,77 \cdot 10^{-1}$	$-3,7 \cdot 10^{-1}$	$-3,8 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$-4,1 \cdot 10^{-2}$
1,5	$4,0 \cdot 10^{-1}$	$6,04 \cdot 10^{-1}$	$-1,0 \cdot 10^{-1}$	$-2,0 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$-2,1 \cdot 10^{-2}$
3,0	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$6,53 \cdot 10^{-1}$	$-1,2 \cdot 10^{-2}$	$-3,9 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$-4,4 \cdot 10^{-3}$
5,0	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$6,92 \cdot 10^{-1}$	$-2,0 \cdot 10^{-3}$	$-7,7 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$-8,8 \cdot 10^{-4}$
7,0	$5,7 \cdot 10^{-2}$	$7,20 \cdot 10^{-1}$	$-4,7 \cdot 10^{-4}$	$-2,0 \cdot 10^{-4}$	$7,8 \cdot 10^{-5}$	$-2,4 \cdot 10^{-4}$

chenden numerischen Wert übereinstimmt. In der zweiten Spalte ist mit κ ein Maß für die Konzentration der Massenverteilung angegeben: Betrachtet man den Querschnitt eines Rings und die zwei Punkte in der Äquatorebene, an denen die Massendichte auf die Hälfte des maximalen Werts abgefallen ist

$$\mu(\varrho_1, z = 0) = \mu(\varrho_2, z = 0) = \frac{\mu_{\text{max}}}{2}, \quad \varrho_2 > \varrho_1, \quad (1.243)$$

dann soll κ das Verhältnis des Abstands dieser Punkte zur vollen Breite des Querschnitts sein, also

$$\kappa := \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_a - \varrho_i}. \quad (1.244)$$

Nur für $\kappa \ll 1$ erwartet man, dass das Roche-Modell eine gute Näherung zur vollen Lösung bietet. Numerisch findet man, dass für polytrope Ringe mit $n \gtrsim 3$ stets $\kappa \lesssim 0,2$ und $A \gtrsim 0,45$ (siehe Tab.1.6) gilt. Das bedeutet, dass Roche-Modelle mit kleinerem Radienverhältnis keine (gute) Näherung zu irgendeinem polytropen Ring darstellen.

In Abb.1.18 sind Querschnitte von polytropen Ringen an der Massenabwurfsgrenze und den zugehörigen Roche-Modellen gezeigt. Für kleine Polytropenindizes n ist der Unterschied, der aus den verschiedenen Parametervorgaben resultiert, klar zu sehen.

Wählt man die Parameter so, dass das Radienverhältnis A der vollen Lösung mit jenem des Roche-Modells übereinstimmt, so ist der Unterschied in der Gestalt der Oberfläche selbst für $n = 1$ nicht besonders groß. Im Gegensatz dazu ist bei übereinstimmenden b' das Radienverhältnis und somit die Gestalt der Oberfläche für $n = 1$ ziemlich unterschiedlich. Mit steigendem n verschwindet der Unterschied, und die volle Lösung wird immer besser angenähert.

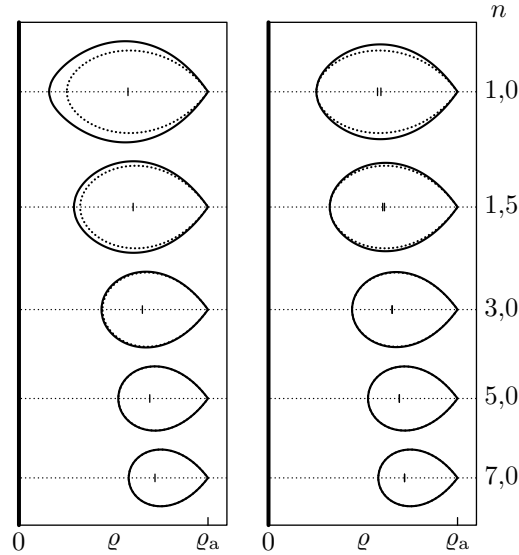


Abbildung 1.18: Vergleich zwischen den Querschnitten polytroper Ringe (gepunktete Linien) an der Massenabwurfsgrenze und den zugehörigen Roche-Modellen (durchgezogene Linie). Links sind die Parameter des Roche-Modells so gewählt, dass b' mit dem numerischen Wert übereinstimmt. Hingegen sind rechts die Parameter so gewählt, dass A übereinstimmt. Die Markierungen in der Mitte geben die Stellen b' an. Bei vorgegebenem A (rechts) zeigt sich, dass stets $b'_{\text{num}} < b'_{\text{Roche}}$ gilt.

Die Abb. 1.19 zeigt einen Vergleich zwischen polytropen Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze und den zugehörigen Roche-Modellen. Der Winkel δ an der „Spitze“ der Oberfläche für die Roche-Modelle (1.224) ist über das gesamte Intervall $b' \in [0, 1]$ als durchgezogene Linie eingetragen. Diese Kurve wird mit zwei verschiedenen Sequenzen polytroper Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze (n variiert) verglichen. Die gepunktete Linie beschreibt Ringe und verschmilzt mit jener des Roche-Modells im Grenzfall dünner Ringe $b' \rightarrow 1$. Die gestrichelte Linie beschreibt sphäroidale Konfigurationen und verschmilzt mit jener des Roche-Modells für $b' \rightarrow 0$. Der Wechsel der Topologie des Roche-Modells von toroidal zu sphäroidal ist bei $b' \approx 0,56$, wie aus (1.228) mit $A = 0$ und $\alpha = 1$ bestimmt werden kann.

Wenn das volle Problem in einem Grenzfall streng durch das zugehörige Roche-Modell beschrieben wird, so muss es eindeutig sein, wie man dann den zusätzlichen physikalischen Parameter im Roche-Modell zu wählen hat. Für polytrope Ringe (1.111) ist

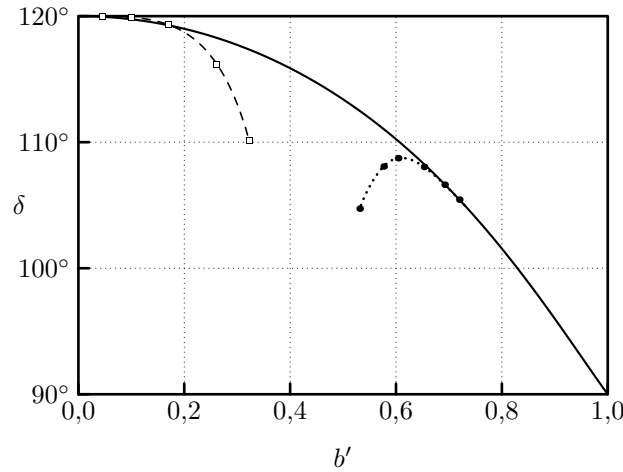


Abbildung 1.19: Der Winkel δ an der „Spitze“ für Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze für das Roche-Modell (durchgezogene Linie) im Vergleich mit numerischen Ergebnissen für polytrope Ringe (gepunktete Linie) und polytrope sphäroidale Konfigurationen (gestrichelte Linie). Die Punkte markieren die Ringe mit $n = 1/2, 1, 3/2, 3, 5$ und 7 , wobei kleinere Werte von n zu kleineren Werten von b' gehören; und die weißen Quadrate markieren die sphäroidalen Konfigurationen mit $n = 1/2, 1, 2, 3$ und 4 , wobei größere Werte von n zu kleineren Werten von b' gehören. Im Grenzfall dünner Ringe ($b' \rightarrow 1$) findet man $\delta \rightarrow 90^\circ$, und für $b' \rightarrow 0$ gilt das bekannte Resultat $\delta \rightarrow 120^\circ$, siehe Anhang E.

mit steigendem Polytropenindex n die Masse zunehmend konzentrierter (κ wird immer kleiner³³), und das Roche-Modell liefert immer bessere Werte, siehe Tab. 1.7³⁴, Tab. 1.8, Abb. 1.18 und Abb. 1.19. Deswegen lässt sich vermuten, dass der „isotherme“ Grenzfall $n \rightarrow \infty$ beliebig gut durch das zugehörige Roche-Modell beschrieben wird. Wie schon im Kapitel 1.1.6 diskutiert, sind „isotherme“ Ringe vermutlich stets unendlich dünn, und somit ist klar, wie der zusätzliche Parameter gewählt werden muss, nämlich $A \rightarrow 1$ bzw. $b' \rightarrow 1$. Der verbleibende Parameter α des Roche-Modells entspricht dem einen physikalischen Parameter der vollen Lösung und parametrisiert die Lösungssequenz vom Ring mit kreisförmigem Querschnitt bis zum Ring an der Massenabwurfsgrenze, siehe Abb. 1.16.

Wenn „isotherme“ Ringe tatsächlich beliebig gut durch das Roche-Modell mit $b' \rightarrow 1$ beschrieben werden, dann müssen die Resultate für „isotherme“ Ringe mit kreisförmigem Querschnitt aus dem Kapitel 1.1.6 mit jenen für das Roche-Modell im Grenzfall dünner Ringe mit $\alpha = 0$ übereinstimmen. Das wird im Folgenden gezeigt. Die Gleichung (1.225) besagt, dass für $\alpha = 0$ die Winkelgeschwindigkeit verschwindet. Dies entspricht der Tatsache, dass bei der Herleitung von (1.203) der Term $\Omega^2 b^2$ gegenüber

³³Für „isotherme“ Ringe in führender Ordnung folgt aus (1.206) $\kappa = 0$.

³⁴Bei vorgegebenem Radienverhältnis stellt die Massenabwurfsgrenze eine obere Schranke für den Polytropenindex dar, siehe Tab. 1.6.

U^i vernachlässigt werden konnte.³⁵ Das logarithmische Verhalten (1.242) der Druckfunktion kann in den Gleichungen (1.201), (1.19) und (1.206) wiedergefunden werden. In führender Ordnung folgt daraus

$$h_{\text{iso}} = h_z - 2K \ln \left(1 + \frac{\pi}{2} \bar{r}^2 \right), \quad \bar{r} \in [0, \infty). \quad (1.245)$$

Im Ausdruck (1.242) divergiert die Funktion h für $t = 0$, und die Oberfläche liegt bei dem endlichen Radius $t = 1$, wohingegen in (1.245) die entsprechende Funktion für $\bar{r} = 0$ endlich bleibt, aber an der Oberfläche $\bar{r} \rightarrow \infty$ divergiert. Um die beiden Ausdrücke für die Druckfunktion zu vergleichen, muss man physikalisch irrelevante Konstanten „eliminieren“ und sich auf den regulären Abschnitt des t -Intervalls ($t > 0$) beschränken, welcher unendlichen Werten von \bar{r} entspricht. Dazu entwickelt man (1.245) an der Stelle $\bar{r} \rightarrow \infty$:³⁶

$$h_{\text{iso}} = -4K \ln \bar{r} + h_z - 2K \ln \frac{\pi}{2} + KO(\bar{r}^{-2}). \quad (1.246)$$

Berücksichtigt man

$$GM = 4\pi K b, \quad (1.247)$$

siehe (1.207) und (1.140) für $n \rightarrow \infty$, so zeigt sich, dass (1.242) gerade dem führenden Glied von (1.246) entspricht. Es gilt mit (1.247) für alle $k \in \mathbb{N}^+$:

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \bar{r}^k \frac{d^k h_{\text{iso}}}{d\bar{r}^k} = t^k \frac{d^k h}{dt^k}. \quad (1.248)$$

Die Situation ist analog zum kugelsymmetrischen Fall, der in den Anhängen D und E diskutiert wird.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das Roche-Modell für Ringe in vielen Fällen zu sehr guten Näherungen des vollen Problems führt. Darüber hinaus bietet es vermutlich strenge Resultate für den Grenzfall „isothermer“ Ringe und neue Lösungen, die nicht mittels eines Ansatzes gemäß Kapitel 1.1.2 gefunden werden konnten.

³⁵Mithilfe von Ostrikers Arbeit [63] kann man auch explizit zeigen, dass dies gerechtfertigt war. Dort sind nämlich die „isothermen“ Ringe bis zur nächsten (ersten) Ordnung diskutiert, und Terme mit Ω tauchen auf. Dazu verwendet man seine Formeln (148) für das Potential und (35) mit (151) für die Winkelgeschwindigkeit zusammen mit $\beta^{-1} \gg \xi \gg 1$.

³⁶Die Bedeutung des Landau-Symbols O ist im Anhang A erklärt.

2 Relativistische Ringe

2.1 Einleitung

Die Untersuchung selbstgravitierender Ringe im Rahmen der Einsteinschen Gravitationstheorie ist deutlich schwieriger als das entsprechende Newtonsche Problem, insbesondere weil die relativistischen Gleichungen nichtlinear sind. Numerisch sind relativistische Ringe konstanter Massendichte (ohne Zentralkörper) erstmals in der Arbeit [6] untersucht worden. Diese „relativistischen Dyson-Ringe“ zeigen viele Gemeinsamkeiten mit den Newtonschen Ringen, etwa dass der Querschnitt im Grenzfall dünner Ringe kreisförmig wird. Es gibt aber auch deutliche Unterschiede: So besitzen einige Konfigurationen, bei denen relativistische Effekte besonders stark hervortreten, Ergosphären. Sehr bemerkenswert ist es, dass für homogene Ringe mit festgehaltenem Koordinaten-Radienverhältnis $A > 0,5613$ eine parametrische Erhöhung der Gravitationsmasse (bei festgehaltener Massendichte) schließlich auf ein *extremes Schwarzes Loch*¹ führt. Für kleinere Radienverhältnisse endet eine solche Sequenz an einer Massenabwurfsgrenze.

Für starr rotierende Staubscheiben² ist ein parametrischer Übergang zum extremen Schwarzen Loch mittels einer post-Newtonschen Untersuchung bereits von Bardeen und Wagoner [13, 14] vermutet und später anhand der strengen Lösung von Neugebauer und Meinel [60, 52] analytisch bestätigt worden. Weitere Beispiele für rotierende Flüssigkeiten mit einem *Grenzfall (extremer) Schwarzer Löcher* sind differentiell rotierende Staubscheiben [8, 2] und nichthomogene Ringe [28, 47]. Im Gegensatz dazu ist für ausgedehnte, sphäroidale Körper bisher kein parametrischer Übergang zum Schwarzen Loch gefunden worden und existiert vermutlich auch nicht. Dort liegen die am stärksten relativistischen Konfigurationen an einer Massenabwurfsgrenze oder besitzen unendlichen Zentraldruck, siehe etwa [3, 56]. In der Arbeit [53], siehe auch [55], wurde gezeigt, dass nur das *extreme* Schwarze Loch bei einem parametrischen Übergang eines Flüssigkeitskörpers zu einem Schwarzen Loch in Frage kommt. Die Verallgemeinerung, dass Flüssigkeiten genau dann parametrisch zu Schwarzen Löchern übergehen, wenn

¹Darunter ist hier und im Folgenden das Schwarze Loch zu verstehen, welches durch die *extreme Kerr-Lösung* [39] beschrieben wird.

²Mit *Staub* ist hier inkohärente Materie gemeint, also eine ideale Flüssigkeit mit der Zustandsgleichung $p = 0$.

$Mc^2 \rightarrow 2\Omega J$ geht³, ist in [54] bewiesen. In [47] wurde für verschiedene Zustandsgleichungen das Verhalten der Multipolmomente von Ringen beim Übergang zum extremen Schwarzen Loch numerisch untersucht und ein vermutlich für alle Flüssigkeitskörper universelles Verhalten im Grenzfall Schwarzer Löcher gefunden, siehe Gleichung (20) ebd. Streng gezeigt ist die Gültigkeit dieser Vermutung für die Staubscheibe [40] und für das Drehimpulsmoment beliebiger Flüssigkeitskörper [46], sofern sie einen Grenzfall Schwarzer Löcher besitzen.

In der Newtonschen Theorie ist der Grenzfall dünner Ringe äquivalent zum Problem unendlich langer Zylinder und kann für homogene Materie analytisch behandelt werden. Dagegen ist es bisher nicht gelungen, die Einsteinschen Feldgleichungen für einen homogenen Zylinder streng zu lösen⁴, obwohl sich zylindersymmetrische Probleme auf ein scheinbar einfaches Differentialgleichungssystem reduzieren lassen, siehe Gleichung (10) in [44]. Numerisch und alternativ mithilfe einer gewissen Näherung ist dieses System für homogene Zylinder in [78] behandelt. In [15] ist dargestellt, wie homogene Zylinder in beliebig hoher post-Newtonscher Ordnung berechnet werden können, und die ersten beiden Ordnungen sind konkret angegeben.

Daher ist es leider nicht möglich, homogene, relativistische Ringe ohne zusätzliche Näherungen im Grenzfall dünner Ringe analytisch zu behandeln. Möchte man dennoch Schritte in diese Richtung gehen, so ist man auf weitere Näherungen angewiesen. In dieser Arbeit werden homogene Ringe mittels einer *post-Newtonschen Näherung* behandelt. Bei dieser Näherungsmethode zur Lösung der Einstein-Gleichungen ergeben sich in führender Ordnung die Newtonschen Gleichungen. Höhere Ordnungen liefern relativistische Korrekturen.

Die post-Newtonsche Näherung wurde in der Vergangenheit von verschiedenen Autoren schon auf sphäroidale Körper angewendet, nämlich auf die Maclaurin-Ellipsoide [17, 11, 66, 67] und insbesondere auch auf deren Scheibengrenzfall [13, 14]. Dabei wurden die post-Newtonschen Gleichungen zu unterschiedlich hohen Ordnungen und mit verschiedenen numerischen bzw. analytischen Methoden gelöst. Wie bereits erwähnt, ist für die relativistische Staubscheibe die strenge Lösung bekannt, und sie kann somit zu beliebig hohen post-Newtonschen Ordnungen entwickelt werden, siehe [70].

Diese Arbeiten zeigen, wie erfolgreich die post-Newtonsche Näherungsmethode ist, und lassen vermuten, dass die zugrunde liegenden Reihen, zumindest im Kontext stationärer, axialsymmetrischer Gleichgewichtsfiguren, gegen die exakten relativistischen Resultate konvergieren.

³Die genaue Bedeutung der Größen wird im Folgenden (am Beispiel der Ringe) erklärt.

⁴Zu einigen speziellen Zustandsgleichungen sind Lösungen bekannt. Jedoch sind die Zustandsgleichungen nicht immer völlig akzeptabel, und es treten bisweilen auch unerwünschte Singularitäten auf der Achse auf, siehe dazu auch [80].

Selbstverständlich ist die Kenntnis der Newtonschen Ausgangslösung eine notwendige Voraussetzung zur Berechnung post-Newtonscher Korrekturen: So betonte Bardeen in [11] ausdrücklich, dass relativistische Ringe nur als Entwicklung um Newtonsche Ringe, nicht aber um Newtonsche Rotationsellipsoide behandelt werden können. Wie im Kapitel 1 ausführlich dargelegt, können Newtonsche Ringe mittels einer Entwicklung im Grenzfall dünner Ringe analytisch berechnet werden und sind somit in diesem Grenzfall einer post-Newtonschen Entwicklung zugänglich. Die so bestimmten analytischen Näherungslösungen für relativistische Ringe enthalten dann zwei unterschiedliche Entwicklungen: die post-Newtonsche und die im Grenzfall dünner Ringe.

2.2 Grundgleichungen

2.2.1 Linienelement

Wie im Newtonschen Fall sollen die Ringe stationär und axialsymmetrisch sein. Diese beiden Symmetrien bedeuten, dass es ein zeitartiges⁵ Killing-Vektorfeld ξ^i

$$\xi_{i;k} + \xi_{k;i} = 0, \quad \xi_i \xi^i < 0, \quad (2.1)$$

und ein raumartiges Killing-Vektorfeld η^i

$$\eta_{i;k} + \eta_{k;i} = 0, \quad \eta_i \eta^i > 0 \quad (2.2)$$

mit geschlossenen Orbits gibt. Für reale Flüssigkeiten folgt aus der Stationarität: *Starre* Rotation⁶ und Axialsymmetrie⁷, siehe [50]. Darüber hinaus wird vermutet, dass alle relativistischen Gleichgewichtsfiguren (analog zu den Newtonschen) äquatorsymmetrisch sind, siehe hierzu [51]. Im Folgenden wird daher für die relativistischen Ringe stets die Äquatorsymmetrie angenommen. In Lewis-Papapetrou-Koordinaten (ϱ, z, φ, t) lassen sich die Killing-Vektorfelder so normieren, dass sie die einfache Form

$$\eta^i = (0, 0, 1, 0) \quad \text{und} \quad \xi^i = (0, 0, 0, 1) \quad (2.3)$$

annehmen. Solche Koordinatensysteme sind an diese Symmetrien angepasst: Sämtliche Größen sind unabhängig von φ und t . Insbesondere gilt dies für die Potentiale ψ , λ , ω

⁵Man beachte hierzu die folgende Diskussion von Ergosphären. Dort ist ξ^i raumartig.

⁶Differentielle Rotation einer realen Flüssigkeit führt zu dissipativen Effekten, ist also mit Stationarität nicht verträglich.

⁷Das ist sehr plausibel, da zeitlich veränderliche Quadrupolmomente bekanntlich eine Quelle von Gravitationswellen sind.

und ν . Das Linienelement lautet

$$\boxed{ds^2 = e^{2\psi}(d\varrho^2 + dz^2) + \varrho^2 e^{2\lambda}(d\varphi - \omega dt)^2 - c^2 e^{2\nu} dt^2.} \quad (2.4)$$

Das Koordinatensystem ist noch nicht eindeutig fixiert. So lassen sich beispielsweise im Vakuum die Koordinaten so wählen, dass $\lambda = -\nu$ gilt und die Vakuum-Einsteingleichungen elegant als *Ernst-Gleichung*, siehe [27, 45], geschrieben werden können. Solche (kanonischen) Weyl-Koordinaten werden hier jedoch nicht verwendet. Vielmehr benutzt man hier Koordinaten, bei denen nicht nur die Potentiale selbst, sondern auch deren partielle Ableitungen (nach ϱ und z) auf der Oberfläche stetig übergehen:

$$(g_{ik}^i - g_{ik}^a)_{\text{Ob}} = 0, \quad \left. \frac{\partial(g_{ik}^i - g_{ik}^a)}{\partial \varrho} \right|_{\text{Ob}} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial(g_{ik}^i - g_{ik}^a)}{\partial z} \right|_{\text{Ob}} = 0. \quad (2.5)$$

Diese Forderung fixiert das Koordinatensystem eindeutig. Die Koordinaten besitzen die schöne Eigenschaft, dass darin kugelsymmetrische Konfigurationen tatsächlich als Kugeln (Oberfläche: $\varrho^2 + z^2 = \text{const}$) dargestellt werden.

Im Folgenden werden wieder die r - χ -Koordinaten, siehe (1.1), benutzt:

$$\varrho = b - r \cos \chi \quad \text{und} \quad z = r \sin \chi, \quad (2.6)$$

wobei b durch

$$b := \frac{\iint \mu \varrho d\varrho dz}{\iint \mu d\varrho dz} \quad (2.7)$$

definiert ist. Insbesondere gilt damit die *verallgemeinerte Schwerpunktsbedingung*⁸

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{Ob}}(\chi)} \mu r^2 \cos \chi dr d\chi = 0. \quad (2.8)$$

Formal gleichen die Gleichungen jenen des Newtonschen Falls, siehe (1.3) und (1.4), jedoch ist hier über die „relativistische“ Oberfläche $r_{\text{Ob}}(\chi)$ zu integrieren. Gleichung (2.6) ergibt

$$d\varrho^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\chi^2, \quad (2.9)$$

⁸Der „Punkt“ $r = 0$ besitzt keine tiefere physikalische Bedeutung. Andere relativistische Verallgemeinerungen der Gleichungen (1.3) und (1.4) wären ebenso möglich.

und insbesondere folgen in den Koordinaten (r, χ, φ, t) die Komponenten

$$g_{rr} = e^{2\psi} \quad \text{und} \quad g_{\chi\chi} = r^2 e^{2\psi}. \quad (2.10)$$

der Metrik.

2.2.2 Fernfeld

In der Newtonschen Theorie nimmt das Gravitationspotential U eines isolierten Körpers im Unendlichen bekanntlich wie $-GM_N/x$ ab. Analog dazu fordert man in der Einsteinschen Theorie für die Potentiale ν und ω aus (2.4):⁹

$$\nu \rightarrow -\frac{GM}{c^2 x} \quad \text{und} \quad \omega \rightarrow \frac{2GJ}{c^2 x^3} \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.11)$$

wobei $x := \sqrt{\varrho^2 + z^2}$ ist. Die Größen M und J sind die *Gravitationsmasse* und der *Drehimpuls*¹⁰ des Rings. Insbesondere ist die Raumzeit *asymptotisch flach*, geht also für $x \rightarrow \infty$ asymptotisch in den Minkowski-Raum über.

2.2.3 Starre Rotation

Bei starrer Rotation ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\boxed{\Omega = \frac{u^\varphi}{u^t}} \quad (2.12)$$

konstant, und die Vierergeschwindigkeit lautet

$$u^i = e^{-U'/c^2} (\xi^i + \Omega \eta^i) \equiv \frac{(\xi^i + \Omega \eta^i) e^{-\nu}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \left(0, 0, \frac{\Omega e^{-\nu}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right). \quad (2.13)$$

Dabei ist

$$\boxed{v := \varrho(\Omega - \omega) e^{\lambda - \nu}} \quad (2.14)$$

die Geschwindigkeit, die ein *lokal nichtrotierender Beobachter* misst. Eine Erklärung dafür, was unter solchen (von Bardeen [10] erstmals verwendeten) Beobachtern zu ver-

⁹Eine Diskussion hierzu, insbesondere auch zum Konzept eines isolierten Systems in der Allgemeinen Relativitätstheorie, findet man in [84, 79], siehe auch [56].

¹⁰Im Gegensatz zur Newtonschen Theorie ist hier der Drehimpuls im Fernfeld messbar. Die Ursache von *gravitomagnetischen Effekten* ist letztlich, dass die Geschwindigkeit in den Energie-Impuls-Tensor (2.15) eingeht.

stehen ist, sowie eine Begründung für die aufgestellte Behauptung zur physikalischen Bedeutung von v findet man im Anhang F, siehe auch [12].

2.2.4 Ergosphären

Einige stark relativistische, rotierende Gleichgewichtsfiguren besitzen sogenannte *Ergosphären*. Innerhalb solcher Raumgebiete wird der Killing-Vektor ξ^i raumartig. Das heißt aber nicht, dass die Raumzeit innerhalb der Ergosphäre nichtstationär wäre. Lokal findet man stets eine zeitartige Linearkombination der beiden Killing-Vektoren ξ^i und η^i . Die Raumartigkeit von ξ^i hat bemerkenswerte Konsequenzen: Innerhalb der Ergosphäre gilt für alle zeitartigen Geodäten $\omega d\varphi/dt > 0$. Das bedeutet, jeder Beobachter muss innerhalb der Ergosphäre in die gleiche Richtung wie die Gleichgewichtsfigur rotieren.¹¹

2.2.5 Energie-Impuls-Tensor

Bei einer starr rotierenden realen Flüssigkeit verschwinden die Reibungsterme im Energie-Impuls-Tensor.¹² Im Gleichgewichtszustand kann man also die Flüssigkeit als *ideale Flüssigkeit* mit *Energie-Impuls-Tensor*

$$T_{ik} = pg_{ik} + \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)u_i u_k \quad (2.15)$$

modellieren. Dabei ist p der *Druck* und μc^2 die Energiedichte bzw. μ die *Massendichte* (inklusive der Beiträge der inneren Energie). Der Zusammenhang zwischen diesen beiden und ggf. weiteren thermodynamischen Größen, wie etwa der Temperatur, wird im Allgemeinen durch einen Satz von Zustandsgleichungen beschrieben. Oft ist es jedoch näherungsweise möglich, mit sogenannten *barotropen Zustandsgleichungen* $\mu = \mu(p)$ zu arbeiten. Dabei hängt der Druck nur von der Massendichte ab, nicht aber von anderen Zustandsgrößen. Insbesondere bei der Berechnung von Neutronensternen ist dies gerechtfertigt, da die Temperatur solcher Sterne, verglichen mit der Fermi-Temperatur, sehr klein ist, siehe etwa [81]. Im Folgenden werden ausschließlich barotrope Zustandsgleichungen verwendet.

Von der Massendichte μ ist die *baryonische Massendichte* μ_B zu unterscheiden, welche die Ruhmasse pro Volumen angibt. Die Konstanz der Anzahl der Baryonen bedeutet:

$$(\mu_B u^i)_{;i} = 0. \quad (2.16)$$

¹¹Bei starrer Rotation hat das Potential ω überall das Vorzeichen von Ω .

¹²Analog dazu reduziert sich in der Newtonschen Theorie die Navier-Stokes-Gleichung bei starrer Rotation auf die Euler-Gleichung.

Man kann μ_B auch als Kehrwert des *spezifischen Volumens* interpretieren. Bei verschwindender Temperatur¹³ lautet der Erste Hauptsatz der Thermodynamik bzw. die Gibbssche Fundamentalgleichung für die spezifischen Größen

$$d\frac{u}{\mu_B} = -p d\frac{1}{\mu_B}, \quad (2.17)$$

wobei

$$u := (\mu - \mu_B)c^2 \quad (2.18)$$

die *Dichte der inneren Energie* ist. Das Integral

$$\mathcal{U} := \int u d^3x \quad (2.19)$$

ist die *innere Energie*. Häufig wird (2.17) in der Form

$$\boxed{\frac{d\mu_B}{\mu_B} = \frac{d\mu}{\mu + p/c^2}} \quad (2.20)$$

geschrieben. Die beim Lösen von (2.20) auftretende Integrationskonstante wird für gewöhnliche baryonische Materie (und nur solche wird hier betrachtet) durch die Bedingung $\mu/\mu_B \rightarrow 1$ für $p \rightarrow 0$ festgelegt. Es genügt also die Kenntnis einer der drei Zustandsgrößen μ , μ_B und p , die anderen werden durch die Zustandsgleichung und die Gibbssche Fundamentalgleichung bestimmt¹⁴.

Später wird die thermodynamische Größe

$$H := \frac{\mu + p/c^2}{\mu_B} \quad (2.21)$$

wichtig sein. Sie taucht nämlich in der Gleichung (2.36) auf. Für H folgt mit (2.20) die Gleichung

$$\frac{dH}{H} = \frac{dp}{p + \mu c^2}. \quad (2.22)$$

¹³Gemäß dem Dritten Hauptsatz der Thermodynamik ist dann sogar die Entropie konstant: Das „ $T dS$ -Glieder“ verschwindet also „ganz sicher“ aus der Gibbsschen Fundamentalgleichung.

¹⁴Natürlich lässt sich im Spezialfall homogener Materie der Druck nicht aus der Massendichte berechnen. Aber auch hier gibt es nur eine „freie“ Zustandsgröße, nämlich den Druck p .

2.2.6 Ausgewählte Zustandsgleichungen

Homogene Materie

Hier ist die Massendichte (unabhängig vom Druck) konstant:

$$\boxed{\mu = \mu_B = \text{const.}} \quad (2.23)$$

Damit folgt

$$H = 1 + \frac{p}{\mu c^2}. \quad (2.24)$$

Relativistische Polytropengleichung

Die *relativistische Polytropengleichung* nach Tooper [83] lautet¹⁵

$$\boxed{p = K \mu_B^{1+1/n} \quad \text{und} \quad \mu = \mu_B + n \frac{p}{c^2}}, \quad (2.25)$$

wobei K die *Polytropenkonstante* und n der *Polytropenindex* ist. Die Gleichung (2.20) ist erfüllt, siehe Anhang G. Der Grenzfall $n \rightarrow 0$ führt auf homogene Materie (2.23), völlig analog zur gewöhnlichen Polytropengleichung (1.111), die den Newtonschen Grenzfall ($p \ll \mu c^2$) von (2.25) bildet.

Ideales, vollständig entartetes Fermi-Gas

Die Zustandsgleichung für ein relativistisches, ideales, vollständig entartetes¹⁶ Fermi-Gas ist implizit durch

$$\boxed{\begin{aligned} p &= c^2 K_F \left[(2x_F^3 - 3x_F) \sqrt{x_F^2 + 1} + 3 \ln \left(x_F + \sqrt{x_F^2 + 1} \right) \right], \\ \mu &= 3K_F \left[(2x_F^3 + x_F) \sqrt{x_F^2 + 1} - \ln \left(x_F + \sqrt{x_F^2 + 1} \right) \right] \quad \text{und} \\ \mu_B &= 8K_F x_F^3 \quad \text{mit} \quad K_F := \frac{c^3 m_F^4 (2s_F + 1)}{48\pi^2 \hbar^3} \end{aligned}} \quad (2.26)$$

gegeben. Dabei sind m_F und s_F die *Masse* und der *Spin eines Fermions*, \hbar das *reduzierte Plancksche Wirkungsquantum*, und die Variable x_F ist der dimensionslose Fermi-Impuls

¹⁵Davon zu unterscheiden ist die Zustandsgleichung $p = K \mu^{1+1/n}$, die auch als Polytropengleichung bezeichnet wird.

¹⁶Hier bedeutet *ideal*, dass Beiträge von Wechselwirkungsenergien zur inneren Energie vernachlässigbar sind, und *vollständig entartet* heißt, dass das Fermi-Gas unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips im tiefsten Zustand ist.

($p_F = cm_F x_F$ ist der Fermi-Impuls). Man kann sich leicht davon überzeugen, dass (2.20) erfüllt ist. Im Newtonschen Grenzfall $p \ll \mu c^2$ (d. h. $x_F \ll 1$) reduziert sich (2.26) auf

$$p = K \mu_B^{1+1/n} \quad \text{mit} \quad K = \frac{c^2}{20K_F^{2/3}}, \quad n = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \mu = \mu_B, \quad (2.27)$$

und im ultrarelativistischen Grenzfall $\mu \gg \mu_B$ (d. h. $x_F \gg 1$) auf¹⁷

$$p = K \mu_B^{1+1/n} \quad \text{mit} \quad K = \frac{c^2}{8K_F^{1/3}}, \quad n = 3 \quad \text{und} \quad 3p = \mu c^2 = u. \quad (2.28)$$

Neutronensterne lassen sich näherungsweise mit dieser Zustandsgleichung beschreiben, wobei natürlich $m_F = m_n$ (Neutronenmasse) und $s_F = 1/2$ gilt. Für den resultierenden statischen, kugelsymmetrischen Neutronenstern maximaler Masse gilt im Zentrum $x_F \sim 1$, siehe [61]. Dort ist also weder (2.27) noch (2.28) anwendbar.

2.2.7 Feldgleichungen

Mit den dimensionslosen Größen

$$\tilde{v} := \frac{v}{c}, \quad \tilde{\omega} := \frac{\omega}{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} := \frac{b\Omega}{c}, \quad \tilde{p} := \frac{p}{\mu c^2} \quad (2.29)$$

ergibt sich

$$\tilde{v} = \frac{\varrho \tilde{\Omega}}{b} (1 - \tilde{\omega}) e^{\lambda - \nu}. \quad (2.30)$$

Die *Einsteinschen Feldgleichungen*

$$R_{ik} - \frac{R}{2} g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \quad (2.31)$$

(R_{ik} ist der Ricci-Tensor und $R = R^i_i$ der Krümmungsskalar) bilden in Lewis-Papapetrou-Koordinaten ein System von vier partiellen Differentialgleichungen. Im Inneren der

¹⁷Die letzte Gleichung gilt auch für ein Photonengas. Ob ein Gas aus Fermionen oder Bosonen besteht, spielt ebenso wie die Ruhmasse in diesem Grenzfall keine Rolle. Der einzige Unterschied ist, dass diese Zustandsgleichung für ein Photonengas streng gilt.

idealen Flüssigkeit (2.15) lauten sie

$$\begin{aligned}
 \Delta\nu &= \frac{4\pi G\mu e^{2\psi}}{c^2} \left[\frac{1+\tilde{v}^2}{1-\tilde{v}^2}(1+\tilde{p}) + 2\tilde{p} \right] - \nabla\nu \cdot \nabla(\lambda + \nu) + \frac{\varrho^2 \tilde{\Omega}^2}{2b^2} e^{2(\lambda-\nu)} (\nabla\tilde{\omega})^2, \\
 \Delta_1(\lambda + \nu) &= \frac{16\pi G\mu}{c^2} \tilde{p} e^{2\psi} - [\nabla(\lambda + \nu)]^2, \\
 \Delta_2\tilde{\omega} &= -\frac{16\pi G\mu}{c^2} \frac{(1-\tilde{\omega})(1+\tilde{p})}{1-\tilde{v}^2} e^{2\psi} - \nabla\tilde{\omega} \cdot \nabla(3\lambda - \nu), \\
 \Delta_{-1}\psi &= -\frac{4\pi G\mu}{c^2} (1+\tilde{p}) e^{2\psi} + \nabla\lambda \cdot \nabla\nu + \frac{\varrho^2}{4b^2} e^{2(\lambda-\nu)} (\nabla\tilde{\omega})^2 + (\Delta_1 - \Delta)\nu,
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

siehe etwa [56]. Die Vakuum-Gleichungen für den Außenraum erhält man durch die formale Setzung von $\mu = 0$. Dabei ist Δ_m der *verallgemeinerte Laplace-Operator*, der angewandt auf eine axialsymmetrische Funktion $f = f(\varrho, z)$ durch

$$\Delta_m f := \varrho^{-m} \nabla \cdot (\varrho^m \nabla f) = f_{,\varrho\varrho} + \frac{m+1}{\varrho} f_{,\varrho} + f_{,zz}
 \tag{2.33}$$

definiert wird. Der Operator ist linear und reduziert sich für $m = 0$ auf den gewöhnlichen Laplace-Operator, d. h. $\Delta_0 = \Delta$.

Im Gegensatz zum Newtonschen Fall müssen hier die Bewegungsgleichungen nicht zusätzlich zu den Feldgleichungen gefordert werden. Der Grund dafür ist, dass die Feldgleichungen (2.31) wegen der kontrahierten Bianchi-Identitäten

$$\left(R^{ik} - \frac{R}{2} g^{ik} \right)_{;k} = 0
 \tag{2.34}$$

die Gleichungen

$$T^{ik}_{;k} = 0
 \tag{2.35}$$

als Integrabilitätsbedingung besitzen. Für eine ideale Flüssigkeit (2.15) ist das gerade die *relativistische Euler-Gleichung*. Zusammen mit dem Ausdruck für die Vierergeschwindigkeit (2.13) führt dies auf die *Gleichgewichtsbedingung*

$$\boxed{H\sqrt{1-\tilde{v}^2}e^\nu = e^{U'_0/c^2} = 1 - \gamma = \text{const.}}
 \tag{2.36}$$

Diese Gleichung ist die relativistische Verallgemeinerung der Bernoulli-Gleichung (1.12). Dabei ist $e^{U'_0/c^2} \equiv 1 - \gamma$ der (konstante) Wert von e^{U'/c^2} auf der Oberfläche.¹⁸ Dort ist

¹⁸Oft wird diese Konstante V_0 genannt. In dieser Arbeit ist mit V_0 jedoch immer die Newtonsche

(für gewöhnliche baryonische Materie) $H = 1$, und der Druck verschwindet:

$$\tilde{p}(r_{\text{Ob}}(\chi), \chi) = 0. \quad (2.37)$$

2.2.8 Physikalische Größen

Die *Gravitationsmasse* M und der *Drehimpuls* J können mit

$$M = \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma} (2T_{ik} - Tg_{ik}) n^i \xi^k d\mathcal{V} \quad \text{und} \quad J = -\frac{1}{c} \int_{\Sigma} T_{ik} n^i \eta^k d\mathcal{V} \quad (2.38)$$

berechnet werden. Dabei ist n^i ein senkrecht auf der raumartigen Hyperfläche Σ ($t = \text{const}$) stehender, zukunftsgerichteter zeitartiger Einheitsvektor: $n_i = (0, 0, 0, -ce^\nu)$. Das Volumenelement ist $d\mathcal{V} = \sqrt{g^{(3)}} d\varrho dz d\varphi$, wobei $g^{(3)} = \varrho^2 e^{4\psi+2\lambda}$ die Determinante des räumlichen Anteils der Metrik ist. In der Tat ergeben (2.38) und (2.11) die gleichen Resultate, siehe etwa [84]. Es folgt

$$J = 2\pi \iint \frac{\mu c^2 + p}{c^2 - v^2} (\Omega - \omega) e^{2\psi+3\lambda-\nu} \varrho^3 d\varrho dz \quad (2.39)$$

und

$$M = \frac{2\Omega J}{c^2} + 2\pi \iint \left(\mu + \frac{3p}{c^2} \right) e^{\nu+2\psi+\lambda} \varrho d\varrho dz. \quad (2.40)$$

Von der Gravitationsmasse ist die *baryonische Masse*

$$M_B = -\frac{1}{c} \int_{\Sigma} \mu_B u^i n_i d\mathcal{V} \quad (2.41)$$

zu unterscheiden. Es folgt

$$M_B = \int_{\Sigma} \mu_B \sqrt{-g} u^t d\varrho dz d\varphi = 2\pi \iint \frac{\mu_B e^{\lambda+2\psi}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \varrho d\varrho dz. \quad (2.42)$$

Sie ist ein Maß dafür, aus wie vielen Baryonen die Flüssigkeit besteht. Die Differenz mit der Gravitationsmasse ergibt den (gravitativen) Massendefekt. Die Größe

$$E_b := (M_B - M)c^2 \quad (2.43)$$

Oberflächenkonstante gemeint.

wird *Bindungsenergie* genannt, und $(M_B - M)/M_B$ wird als *relative Bindungsenergie* bezeichnet. Die relative Rotverschiebung von Licht, das von der Oberfläche des Rings ins Unendliche ausgestrahlt wird und keinen Drehimpuls trägt¹⁹ (im Folgenden einfach relative Rotverschiebung oder noch kürzer *Rotverschiebung* genannt), lautet²⁰

$$Z_0 = \frac{\gamma}{1 - \gamma}. \quad (2.44)$$

Wie für Newtonsche Ringe ist es auch hier sehr nützlich, die Ringe mittels des *Koordinaten-Radienverhältnisses*

$$A := \frac{\varrho_i}{\varrho_a} \quad (2.45)$$

zu charakterisieren. Diese Größe hängt zwar von Koordinaten ab, jedoch sind sie hier eindeutig fixiert, sodass die Größe A eine eindeutige Bedeutung hat. Der (äußere) *Umfangsradius* (engl. *circumferential radius*) des Rings ist

$$R_U := (\varrho e^\lambda)_{\varrho=\varrho_a, z=0}. \quad (2.46)$$

2.3 Numerische Ergebnisse

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der analytischen Behandlung von Ringen. Deswegen werden hier nur sehr kurz einige numerische Resultate präsentiert, die in [28] veröffentlicht sind. Die Ringe wurden mithilfe eines AKM-Codes [4, 5, 9] berechnet.

In der Abbildung 2.1 sind numerisch bestimmte Massenabwurfsgrenzen für polytrophe Ringe mit verschiedenen Polytropenindizes n und für die Ringe, die aus einem Fermi-Gas bestehen, dargestellt. Für alle untersuchten Ringe gibt es einen parametrischen Übergang zum extremen Schwarzen Loch. Wie bei Newtonschen, polytropen Ringen (siehe Tab. 1.6) verschiebt sich die Massenabwurfsgrenze mit steigendem Polytropenindex zu immer größeren Radienverhältnissen. Eine weitere interessante numerische Beobachtung ist, dass der Querschnitt von polytropen Ringen bei festgehaltener Rot-

¹⁹Darunter versteht man, dass die Konstante $\eta_i p^i = 0$ ist, wobei p^i hier der Viererimpuls eines Photons ist.

²⁰Die Vierergeschwindigkeiten von „Sender“ (auf der Ringoberfläche) und „Empfänger“ (im Unendlichen) sind $u_S^i = e^{-U'_0/c^2}(\xi^i + \Omega\eta^i)p_i|_S$ und $u_E^i = \xi^i$. Es folgt

$$Z_0 = \frac{\omega_S}{\omega_E} - 1 = \frac{e^{-U'_0/c^2}(\xi^i + \Omega\eta^i)p_i|_S}{\xi^i p_i|_E} - 1 = e^{-U'_0/c^2} - 1 = \frac{\gamma}{1 - \gamma}.$$

Dabei wurde die Tatsache verwendet, dass die Photonen keinen Drehimpuls tragen und $\xi^i p_i$ entlang der Nullgeodäten konstant ist.

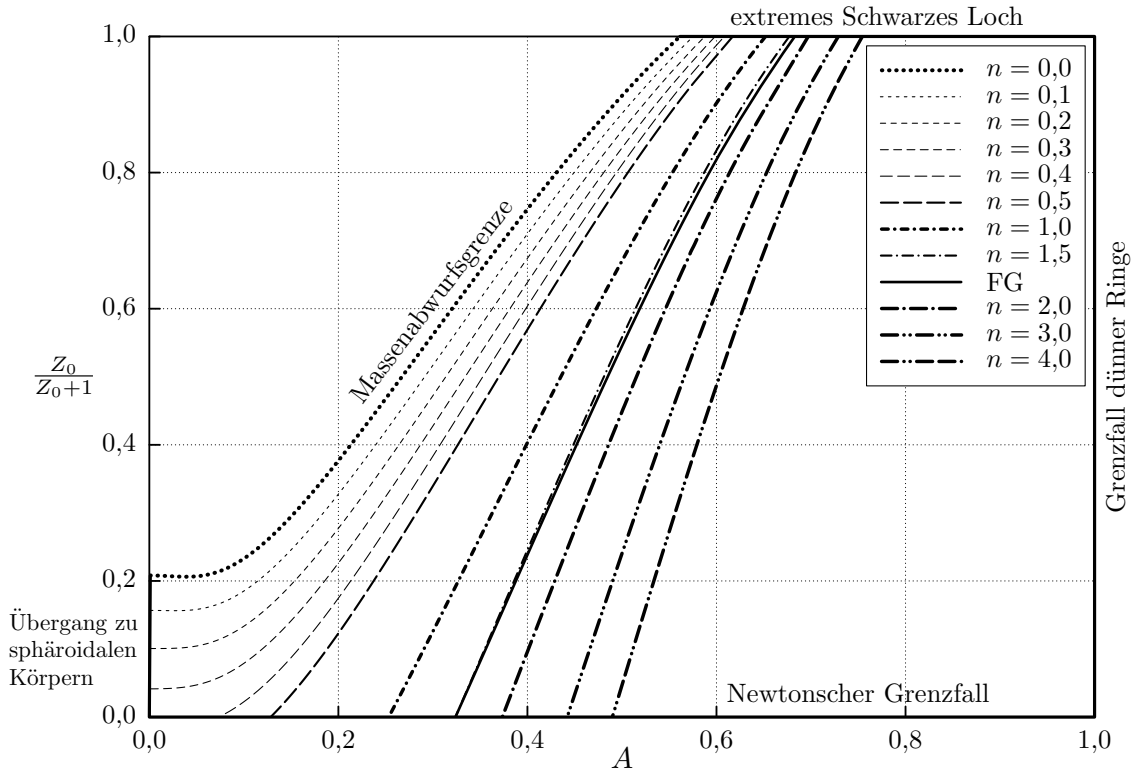


Abbildung 2.1: Numerisch bestimmte Massenabwurfsgrenzen für polytrope Ringe mit verschiedenen Polytropenindizes n und für die Ringe, die aus einem Fermi-Gas (FG) bestehen.

verschiebung im Grenzfall dünner Ringe $A \rightarrow 1$ in Lewis-Papapetrou-Koordinaten immer kreisförmiger wird.²¹ Dieselbe Beobachtung ist bereits für homogene, relativistische Ringe gemacht worden, siehe Abb. 5 in [6].

2.4 Post-Newtonsche Ringe

2.4.1 Ansatz für die post-Newtonsche Entwicklung

Wie schon in der Einleitung beschrieben, sind post-Newtonsche Entwicklungen schon von verschiedenen Wissenschaftlern auf sphäroidale Gleichgewichtsfiguren angewandt worden. Im Folgenden werden homogene, toroidale Gleichgewichtsfiguren gesucht, wobei sich an Bardeens Herangehensweise ([11], siehe auch [66, 67]) orientiert wird.

²¹Das legt die Vermutung nahe, dass die auf nichthomogene Ringe verallgemeinerten Reihenansätze aus den Kapiteln 2.4.1 und 2.4.5 zu konsistenten Näherungslösungen führen. Eventuell sind die resultierenden Gleichungen für polytrope Ringe mit dem Index $n = 1$ (hier sind beide Polytropengleichungen, also $p = K\mu_B^2$ und $p = K\mu^2$ gemeint) analytisch lösbar. Für die Newtonschen Gleichungen ist dies mindestens bis zur dritten Ordnung in σ der Fall. Das bedeutet, dass die Newtonschen Quellterme in der auf polytrope Ringe verallgemeinerten Gleichung (2.63) bis zur dritten Ordnung bekannt sind.

Ausgehend von einer Newtonschen Konfiguration, gewissermaßen als Entwicklungspunkt, werden bei einer post-Newtonschen Entwicklung sämtliche Größen in $1/c$ entwickelt. Dazu führt man hier den dimensionslosen Entwicklungsparameter²²

$$\boxed{\varepsilon := \frac{\sqrt{G\mu}b_N}{c}} \quad (2.47)$$

ein. Der post-Newtonsche Ansatz lautet

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{i=1}^{\infty} \nu_{2i} \varepsilon^{2i}, & \lambda &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{2i} \varepsilon^{2i}, & \psi &= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{2i} \varepsilon^{2i} \\ \tilde{\omega} &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\omega}_{2i} \varepsilon^{2i}, & \gamma &= \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{2i} \varepsilon^{2i}, & \tilde{\Omega} &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_{2i-1} \varepsilon^{2i-1} \end{aligned} \quad (2.48)$$

und

$$r_{\text{Ob}}(\chi) = \sum_{i=0}^{\infty} r_{2i}(\chi) \varepsilon^{2i}. \quad (2.49)$$

Wie die Entwicklung anderer Größen, etwa \tilde{v} und \tilde{p} , aussieht, folgt aus deren Definitionen und ggf. den Einstein-Gleichungen (bzw. der relativistischen Euler-Gleichung):

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{v}_{2i-1} \varepsilon^{2i-1} \quad \text{und} \quad \tilde{p} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{p}_{2i} \varepsilon^{2i}. \quad (2.50)$$

Weil in die Gleichung (2.7) die „relativistische“ Oberfläche eingeht, ergeben sich in den verschiedenen post-Newtonschen Ordnungen im Allgemeinen unterschiedliche Werte für b , d. h. man hat wie für alle anderen Größen auch eine Reihe in ε anzusetzen:

$$b = b_N \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{b}_{2i} \varepsilon^{2i} \right). \quad (2.51)$$

Jedoch besitzt man bei post-Newtonschen Berechnungen gewisse Freiheiten, die es erlauben, die Rechnung so durchzuführen, dass es bei ausgewählten Größen keine post-

²²Wenn man zusätzlich eine Entwicklung im Grenzfall dünner Ringe durchführt, d. h. in σ entwickelt, besitzt die Größe $a_N = \sigma b_N$ eine klare Bedeutung. Dann könnte man auch mit dem Entwicklungsparameter $\varepsilon' := \sqrt{G\mu}a_N/c = \varepsilon\sigma$ arbeiten. Die zusätzlichen Faktoren von σ müssten dann lediglich in den Reihenansätzen aus Kapitel 2.4.5 berücksichtigt werden.

Newtonschen Korrekturen gibt. Hier wählt man b als eine solche Größe:²³

$$b \equiv b_N. \quad (2.52)$$

Diese Wahl ist sehr zweckmäßig, da damit die Bedeutung der Koordinaten r und χ in allen post-Newtonschen Ordnungen gleich ist. Später muss man noch eine weitere Wahl treffen, und dies wird auch noch ausführlich diskutiert.

Bei jenen Größen, die ein Pendant in der Newtonschen Theorie haben, stellt das führende Glied der post-Newtonschen Entwicklung gerade die entsprechende Newtonsche Größe (Index „N“) dar:

$$\begin{aligned} \Omega_N &\equiv cb^{-1}\varepsilon\tilde{\Omega}_1 = \sqrt{G\mu}\tilde{\Omega}_1, & v_N &\equiv c\varepsilon\tilde{v}_1 = \sqrt{G\mu b}\tilde{v}_1, \\ p_N &\equiv \mu c^2\varepsilon^2\tilde{p}_2 = G\mu^2b^2\tilde{p}_2, & r_{\text{Ob},N} &\equiv r_0, \\ U &\equiv c^2\varepsilon^2\nu_2 = G\mu b^2\nu_2, & V_0 &\equiv -c^2\varepsilon^2\gamma_2 = -G\mu b^2\gamma_2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Die Begründungen dieser Aussagen folgt im Kapitel 2.4.2, wo gezeigt wird, dass die führende Ordnung der post-Newtonschen Entwicklung auf die Newtonschen Gleichungen führt.

Mit den post-Newtonschen Ansätzen geht man nun in die Feldgleichungen, wobei der dort auftretende Faktor $G\mu/c^2$ mittels ε^2/b^2 ausgedrückt wird. Man entwickelt diese Gleichungen in ε und erhält, wie schon erwähnt, in führender Ordnung die Newtonschen Gleichungen. Höhere Ordnungen ergeben sogenannte post-Newtonsche Gleichungen und liefern relativistische Korrekturen.

2.4.2 Newtonsche Ordnung

Der Newtonsche Grenzfall der Einsteinschen Gravitationstheorie wird durch das Linienelement²⁴

$$-c^2 d\tau^2 \equiv ds^2 = d\vec{x}^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 \quad \text{mit} \quad |U| \ll c^2 \quad (2.54)$$

beschrieben; hierbei ist τ die Eigenzeit. Damit ergeben sich nämlich in führender Ordnung die Newtonschen Gleichungen: Die Feldgleichungen reduzieren sich auf $\Delta U =$

²³Stillschweigend wurde mit μ eine weitere solche Größe gewählt. Wenn man die Zustandsgleichung als feste Vorgabe betrachtet, hatte man freilich keine andere Wahl.

²⁴Oft findet man in der Literatur, siehe etwa [34], für statische, schwache Gravitationsfelder auch das Linienelement $ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) d\vec{x}^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2$ mit $|U| \ll c^2$. Mittels der zusätzlichen Korrektur am räumlichen Anteil der Metrik lässt sich die Ablenkung eines Lichtstrahls an einer Masse in führender Ordnung qualitativ und quantitativ richtig beschreiben – ein Effekt, den es in der Newtonschen Theorie (streng genommen) nicht gibt.

$4\pi G\mu$, und die Gleichung für zeitartige Geodäten führt für kleine Geschwindigkeiten, d. h. $d\tau \approx dt$, auf die Newtonsche Bewegungsgleichung $\nabla U = -\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$. Der Vergleich von (2.4) mit (2.54) ergibt für das Newtonsche Gravitationspotential $U \equiv c^2\varepsilon^2\nu_2 = G\mu b^2\nu_2$, siehe (2.53). Die Größen ψ_2 , λ_2 , $\tilde{\omega}_2$, ν_4 und erst recht höhere Glieder sind relativistische Korrekturen zur Newtonschen Theorie.

Die Gleichung (2.30), in der die Potentiale ω , λ und ν vorkommen, liefert in der führenden Ordnung den bekannten Zusammenhang

$$\tilde{v}_1 = \frac{\varrho\tilde{\Omega}_1}{b} \quad \text{bzw.} \quad v_N = \varrho\Omega_N \quad (2.55)$$

und zeigt damit, dass \tilde{v}_1 der Newtonschen Geschwindigkeit entspricht, siehe (2.53). Die Newtonsche Feldgleichung (1.5) bzw. (1.6) ergibt sich aus der ersten Gleichung des Systems (2.32) in führender Ordnung

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Delta\nu_2^a = 0 & \text{bzw.} \quad \Delta U^a = 0, \\ \Delta\nu_2^i = \frac{4\pi}{b^2} & \text{bzw.} \quad \Delta U^i = 4\pi G\mu, \end{array}} \quad (2.56)$$

und die Gleichung (2.36) liefert die Bernoulli-Gleichung (1.12)

$$\boxed{\tilde{p}_2 - \frac{\tilde{v}_1^2}{2} + \nu_2^i = -\gamma_2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{p_N}{\mu} - \frac{v_N^2}{2} + U^i = V_0.} \quad (2.57)$$

Insbesondere gilt $V_0 \equiv -c^2\varepsilon^2\gamma_2 = -G\mu b^2\gamma_2$, siehe (2.53). Die Oberflächenbedingung (2.37) ergibt in führender Ordnung (1.13)

$$\tilde{p}_2(r_0(\chi), \chi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad p_N(r_{\text{Ob},N}(\chi), \chi) = 0. \quad (2.58)$$

Die Übergangsbedingungen (2.5) reduzieren sich auf die Newtonschen Übergangsbedingungen

$$\begin{aligned} (\nu_2^i - \nu_2^a)_{r=r_0} &= \left. \frac{\partial(\nu_2^i - \nu_2^a)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0 \quad \text{bzw.} \\ (U^i - U^a)_{r=r_{\text{Ob},N}} &= \left. \frac{\partial(U^i - U^a)}{\partial r} \right|_{r=r_{\text{Ob},N}} = 0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

siehe auch (1.7). Weiterhin ist wichtig, dass sich die Definition (2.7) der relativistischen Größe b in Newtonscher Ordnung auf die Definition (1.3) der Newtonschen Größe b_N reduziert. Dies wurde stillschweigend bereits in der Gleichung (2.51) vorausgesetzt.

In führender Ordnung der Entwicklung nach ε reduzieren sich die relativistischen Gleichungen also auf die vertrauten Newtonschen Gleichungen für homogene²⁵ Gleichgewichtsfiguren. Für Ringe ist das zugehörige Problem bis zur 20. Ordnung in σ gelöst.

2.4.3 Erste post-Newtonsche Ordnung

Die Einstein-Gleichungen (2.32) mit $\Delta_1(\lambda + \nu)$, $\Delta_2\tilde{\omega}$ und $\Delta_{-1}\psi$ lieferten keinen Beitrag zur Newtonschen Ordnung. Hier liefert die führende Ordnung (ε^2) bereits post-Newtonsche Gleichungen:

$$\Delta_1(\lambda_2 + \nu_2) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta_{-1}(\psi_2 + \nu_2) = 0, \quad (2.60)$$

sowie

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_2\tilde{\omega}_2^a &= 0, \\ \Delta_2\tilde{\omega}_2^i &= -\frac{16\pi}{b^2}. \end{aligned}} \quad (2.61)$$

Die Gleichungen (2.60) lassen sich sofort lösen:

$$\lambda_2 = \psi_2 = -\nu_2. \quad (2.62)$$

Die erste Gleichung von (2.32) liefert in der Ordnung ε^4 die Gleichung

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\nu_4^a &= 0, \\ \Delta\nu_4^i &= \frac{8\pi}{b^2} \left(-\nu_2^i + \tilde{v}_1^2 + \frac{3}{2}\tilde{p}_2 \right), \end{aligned}} \quad (2.63)$$

wobei ψ_2^i im Quellterm mittels (2.62) zugunsten von ν_2^i „eliminiert“ wurde. Die Gleichgewichtsbedingung (2.36) liefert in der Ordnung ε^4

$$\boxed{\tilde{p}_4 + \tilde{p}_2 \left(\nu_2^i - \frac{\tilde{v}_1^2}{2} \right) + \nu_4^i + \frac{\nu_2^{i2}}{2} - \frac{1}{2}\nu_2^i\tilde{v}_1^2 - \frac{\tilde{v}_1^4}{8} - \tilde{v}_1\tilde{v}_3 = -\gamma_4,} \quad (2.64)$$

wobei gemäß (2.30)

$$\tilde{v}_3 = \frac{\varrho}{b} \left[\tilde{\Omega}_3 - \tilde{\Omega}_1(\tilde{\omega}_2^i + 2\nu_2^i) \right] \quad (2.65)$$

²⁵Die Quelle der Poisson-Gleichung (2.56) ist konstant. Für nichthomogene Ringe müsste man einen allgemeineren post-Newtonschen Ansatz, siehe etwa (G.1) und (G.2), machen.

ist. Die Schwerpunktsbedingung (2.8) ergibt

$$\boxed{\int_0^{2\pi} r_2(\chi) r_0(\chi)^2 \cos \chi \, d\chi = 0.} \quad (2.66)$$

Entwickelt in ε , ergeben sich aus (2.5) die Übergangsbedingungen

$$(\tilde{\omega}_2^i - \tilde{\omega}_2^a)_{r=r_0(\chi)} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial(\tilde{\omega}_2^i - \tilde{\omega}_2^a)}{\partial r} \right|_{r=r_0(\chi)} = 0, \quad (2.67)$$

sowie

$$(\nu_4^i - \nu_4^a)_{r=r_0(\chi)} + r_2 \left. \frac{\partial(\nu_2^i - \nu_2^a)}{\partial r} \right|_{r=r_0(\chi)} = 0 \quad (2.68)$$

und

$$\left. \frac{\partial(\nu_4^i - \nu_4^a)}{\partial r} \right|_{r=r_0(\chi)} + r_2 \left. \frac{\partial^2(\nu_2^i - \nu_2^a)}{\partial r^2} \right|_{r=r_0(\chi)} = 0. \quad (2.69)$$

Zusammen mit der Gleichung (2.59) lässt sich (2.68) zu

$$(\nu_4^i - \nu_4^a)_{r=r_0(\chi)} = 0 \quad (2.70)$$

vereinfachen. Die post-Newtonsche Korrektur r_2 der Newtonschen Oberfläche trägt also nur zur Übergangsbedingung (2.69) bei. Die Gleichung

$$\tilde{p}_4|_{r=r_0(\chi)} + r_2(\chi) \left. \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial r} \right|_{r=r_0(\chi)} = 0 \quad (2.71)$$

folgt aus (2.37) und sichert, dass der Druck auf der Oberfläche in erster post-Newtonscher Ordnung verschwindet. Damit lässt sich die Gleichung (2.64) auf der Newtonschen Oberfläche $r = r_0(\chi)$ auswerten. Zusammen mit (2.58) folgt

$$\left(-r_2 \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial r} + \nu_4^i + \frac{\nu_2^{i2}}{2} - \frac{1}{2} \nu_2^i \tilde{v}_1^2 - \frac{\tilde{v}_1^4}{8} - \tilde{v}_1 \tilde{v}_3 \right)_{r=r_0(\chi)} = -\gamma_4. \quad (2.72)$$

2.4.4 Zur Bindungsenergie

Für die relative Bindungsenergie gilt gemäß (G.10)

$$\frac{M_B - M}{M_B} = -\frac{T + \mathcal{U} + W}{M_N c^2} + O(\varepsilon^4), \quad (2.73)$$

wobei T , \mathcal{U} und W die kinetische (1.45), die innere (2.19) und die potentielle Energie (1.44) der zugehörigen Newtonschen Konfiguration sind und M_N deren (Newtonsche) Masse ist. Weiterhin lässt sich das führende Glied der Rotverschiebung mithilfe der Newtonschen Größe V_0 bestimmen:²⁶

$$Z_0 = -\frac{V_0}{c^2} + O(\varepsilon^4), \quad (2.74)$$

siehe (J.7) und (2.53). Damit folgt für die relative Bindungsenergie in Abhängigkeit von Z_0 :

$$\frac{M_B - M}{M_B} = \frac{T + \mathcal{U} + W}{M_N V_0} Z_0 + O(\varepsilon^2). \quad (2.75)$$

Es ist bemerkenswert, dass allein Newtonsche Größen genügen (nicht einmal c wird benötigt), um den (gravitativen) Massendefekt bei gegebener Rotverschiebung in führender Ordnung zu berechnen.²⁷ Das bedeutet, dass auch für polytrope Ringe analytische Aussagen getroffen werden können, obwohl deren erste post-Newtonsche Ordnung nicht berechnet wurde. Insbesondere gilt das natürlich für polytrope Ringe mit $n = 1$: In der Abbildung 2.2 ist für die vorgegebene Rotverschiebung $(1 + Z_0)^2 = 5/4$, d. h. $Z_0 \approx 0,12$, die „Newtonsche“ Bindungsenergie gemäß (2.75) als Funktion des Radienverhältnisses A eingezeichnet, und zwar sowohl die numerisch als auch die analytisch bis Ordnung $q = 3$ berechnete Kurve.²⁸ Weiterhin ist für diese Rotverschiebung die numerische Kurve der relativistischen Ringe mit Polytropenindex $n = 1$, siehe (2.25), dargestellt.

Besonders interessant ist das Verhalten im Grenzfall dünner Ringe. Mithilfe der Gleichungen (1.47), (1.138), (1.139), (1.55) und (G.19) (siehe auch [63], insbesondere für den „isothermen“ Grenzfall $n \rightarrow \infty$), kann man zeigen, dass bei beliebigem (endlichem) Polytropenindex n die Ableitung der Newtonschen Größe $(T + \mathcal{U} + W)/(M_N V_0)$ nach dem Radienverhältnis A im Grenzfall dünner Ringe $A \rightarrow 1$ divergiert, die Größe selbst

²⁶Die Situation ist ähnlich wie beim (gravitativen) Massendefekt (siehe Anhang G). In beiden Fällen ist der führende Term einer Größe, die einen relativistischen Effekt beschreibt, mittels Newtonscher Größen und der Konstante c^2 berechenbar.

²⁷Es gilt $\mathcal{U} = nP$, siehe (G.19).

²⁸Das bedeutet $e^{2U'/c^2} = 0,8$. In Abb. 2 in [28] sind weitere numerische Kurven für die relativistische Sequenz (dort mit $e^{2V_0} = 0,8$ bezeichnet) dargestellt.

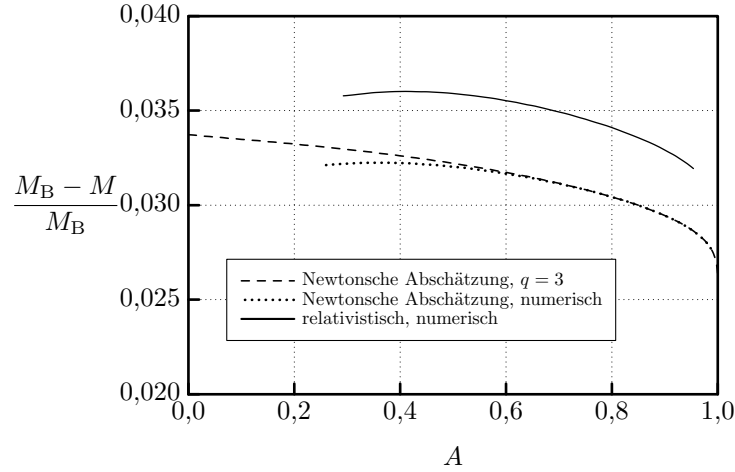


Abbildung 2.2: Relative Bindungsenergie für polytrope Ringe mit $n = 1$ und $(1+Z_0)^2 = 5/4$. Dargestellt ist das Ergebnis gemäß (2.75) zur dritten Ordnung in σ und die entsprechende numerische Kurve, welche für $A_{\text{MA},N} \approx 0,25$ an einer Massenabwurfsgrenze endet. Zum Vergleich dazu ist die numerische Kurve für relativistische, polytrope Ringe (2.25) mit $n = 1$ dargestellt. Hier ist $A_{\text{MA},\text{rel}} \approx 0,29$.

aber den endlichen Grenzwert $1/5$ besitzt. Es ergibt sich nämlich²⁹

$$\frac{T + \mathcal{U} + W}{M_N V_0} = \frac{4\Lambda - 3n + 15}{20\Lambda + n + 35} + o(\sigma^0). \quad (2.76)$$

Entwickelt man das führende Glied der Reihe in σ zusätzlich nach $\Lambda \rightarrow \infty$, folgt

$$\frac{4\Lambda - 3n + 15}{20\Lambda + n + 35} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \left(1 - \frac{2n}{5}\right) \frac{1}{\Lambda} + O(\Lambda^{-2}). \quad (2.77)$$

Das heißt, für $n < 5/2$, wie etwa in Abb. 2.2, nimmt die relative Bindungsenergie (in führender Ordnung sämtlicher Reihen) zu, wenn man sich vom Grenzfall dünner Ringe wegbewegt. Für $n > 5/2$ nimmt sie ab.

In der Abbildung 2.3 für die relative Bindungsenergie homogener Ringe mit $Z_0 = 0,1$ liegt die „Newtonsche“ Kurve unter der relativistischen Kurve, während es in Abb. 2.2 umgekehrt ist. Weil für die homogenen Ringe die post-Newtonschen Gleichungen gelöst wurden, kann man Korrekturen zum „Newtonschen“ Resultat (2.75) berechnen. Für die Wahl $d = d_M$ ³⁰ ist die post-Newtonsche Kurve eingezeichnet, welche eine deutliche Verbesserung gegenüber der „Newtonschen“ Kurve bringt. Aber selbst die „Newtonsche“ Kurve gibt, wie auch schon in Abb. 2.2, zumindest die Größenordnung des (gravitativen) Massendefekts richtig wieder.

²⁹Für das analoge Problem einer statischen, polytropen Gaskugel vom Radius x gilt $T = 0$, $V_0 = -GM/x$, $\mathcal{U} = nP$, $W = -3GM^2/[(5-n)x]$, siehe etwa [24], und natürlich die Virialidentität (1.47). Damit folgt $(T + \mathcal{U} + W)/(MV_0) = (3-n)/(5-n)$.

³⁰Was unter d und d_M zu verstehen ist, wird noch ausführlich erklärt.

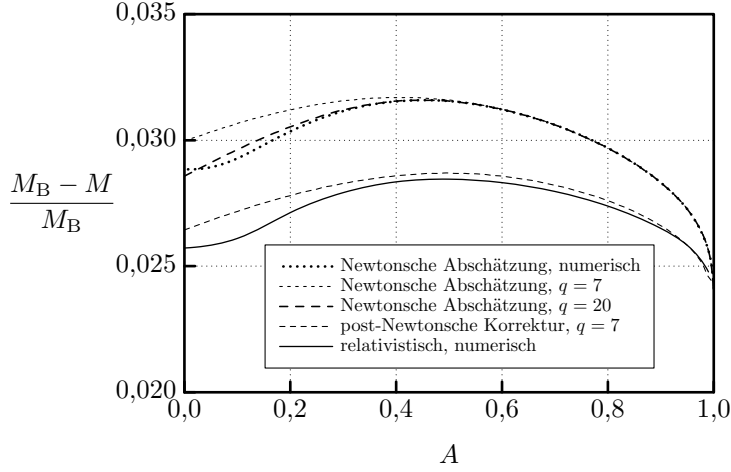


Abbildung 2.3: Relative Bindungsenergie für homogene Ringe mit $Z_0 = 0,1$. Dargestellt ist das „Newtonsche“ Ergebnis gemäß (2.75), sowohl numerisch als auch analytisch bis zur 7. bzw. 20. Ordnung in σ berechnet. Außerdem sind die erste post-Newtonsche Näherung (mit $d = d_M$) in siebter Ordnung in σ und die numerisch berechnete Kurve für homogene, relativistische Ringe eingezeichnet.

2.4.5 Ansatz und Lösungsmethode

Die post-Newtonschen Gleichungen (2.61), (2.63) und (2.64) können im Grenzfall dünner Ringe ganz ähnlich zum Newtonschen Fall gelöst werden. Die Entwicklung nach $\sigma = a/b$ ($a \equiv a_N$) führt wieder auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

Der wichtigste Unterschied ist, dass nun im Außenraum neben einer (gewöhnlichen) Laplace-Gleichung (2.63) auch eine verallgemeinerte Laplace-Gleichung (2.61) zu lösen ist. Dies ist jedoch kein prinzipielles Problem, da diese Gleichung in Toroidalkoordinaten (siehe Anhang H) mit einem Separationsansatz gelöst werden kann. Das ist im Anhang I gezeigt. Insbesondere ist dort mit den K_l , siehe (I.15) und (I.16), ein Satz von axialsymmetrischen, stationären, äquatorsymmetrischen Lösungen angegeben, die im Unendlichen verschwinden und nur bei $r = 0$ Singularitäten besitzen. Dieser Satz entspricht den I_l der (gewöhnlichen) Laplace-Gleichung.

Konkret macht man für die post-Newtonschen Größen die folgenden Ansätze:³¹

$$\nu_4^i = \pi^2 \sigma^4 \sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i N_{ik}^i(y) \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^{q+4}), \quad (2.78)$$

$$\nu_4^a = \pi^2 \sigma^4 \sum_{l=1}^{q+1} \sum_{i=l-1}^q F_{li} I_l(y, \chi) a^{2l-1} \sigma^{i-l} + o(\sigma^{q+4}), \quad (2.79)$$

$$\tilde{\omega}_2^i = \pi \sigma^2 \sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i w_{ik}^i(y) \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^{q+2}), \quad (2.80)$$

$$\tilde{\omega}_2^a = \pi \sum_{l=1}^{q+1} \sum_{i=l-1}^q G_{li} K_l(y, \chi) a^{2l+1} \sigma^{i-l} + o(\sigma^{q+2}) \quad (2.81)$$

für die Korrektur ν_4 zum Newtonschen Potential und den Beitrag $\tilde{\omega}_2$ zum Potential ω ,

$$\tilde{p}_4 = \pi^2 \sigma^4 \sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i q_{ik}(y) \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^{q+4}), \quad (2.82)$$

$$\tilde{\Omega}_3 = \pi^{3/2} \sigma^2 \sum_{i=1}^{q+1} L_i \sigma^i + o(\sigma^{q+3}), \quad (2.83)$$

$$\gamma_4 = \pi^2 \sigma^4 \sum_{i=0}^q g_i \sigma^i + o(\sigma^{q+4}) \quad (2.84)$$

für die Korrekturen zum Druck, zur Winkelgeschwindigkeit und zur Konstante γ , und schließlich

$$\frac{r_2}{a} \equiv y_2 = \pi \sigma^2 d + \pi \sigma^2 \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^i \kappa_{ik} \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^{q+2}) \quad (2.85)$$

für die Korrektur der Newtonschen Oberfläche. Hierbei ist wieder $y := r/a$, siehe auch (1.23). Im Folgenden benötigt man die Entwicklungen der äußeren Potentiale ν_4^a und $\tilde{\omega}_2^a$ für $r/b \rightarrow 0$ (siehe dazu Anhang I):

$$\begin{aligned} \nu_4^a &= \pi^2 \sigma^4 \sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i N_{ik}^a(y) \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^{q+4}), & (\text{für } r/b \rightarrow 0), \\ \tilde{\omega}_2^a &= \pi \sigma^2 \sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^i w_{ik}^a(y) \cos(k\chi) \sigma^i + o(\sigma^{q+2}), & (\text{für } r/b \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (2.86)$$

³¹Die Koeffizienten L_{q+1} und g_q werden erst in der $(q+1)$ -ten Ordnung bestimmt. In der q -ten Ordnung wird eine Gleichung zwischen den beiden (unbekannten) Größen aufgestellt, die zur Berechnung des Drucks benötigt wird. Die Situation ist ganz analog zum Newtonschen Fall, siehe Fußnote 6.

Gemäß diesem Ansatz hängen im Grenzfall dünner Ringe ($\sigma \rightarrow 0$) die Größen im Inneren des Rings nicht von χ ab, und insbesondere wird der Querschnitt (in den verwendeten Koordinaten) kreisförmig. Nahegelegt wird dieser Ansatz nicht nur durch die Analogie zu den Newtonschen Ringen, sondern auch durch die numerische Berechnung von relativistischen Ringen, siehe Abb. 5 in [6]. Dass alle Gleichungen konsistent gelöst werden können, rechtfertigt diesen Ansatz im Nachhinein.

Es zeigt sich, dass das Gleichungssystem, welches aus dem Ansatz folgt, unterbestimmt ist. In der führenden Ordnung gibt es genau eine Gleichung mehr als Unbekannte. In den höheren Ordnungen kommen dann jeweils genau so viele Gleichungen wie Unbekannte dazu. Jedoch ist es möglich, das Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Koeffizienten d zu lösen. Die übrigen Koeffizienten hängen dann (parametrisch) von d ab. Insbesondere kann d beliebig gewählt werden, ohne dass eine post-Newtonsche Gleichung verletzt wird. Was unter *der* (ersten) post-Newtonschen Entwicklung zu verstehen ist, ist also nicht eindeutig. Diese Freiheit beruht nicht auf der Entwicklung in σ für dünne Ringe, sondern ist eine inhärente Eigenschaft der post-Newtonschen Entwicklung. Analoge Freiheiten hat man bei der post-Newtonschen Berechnung von sphäroidalen Körpern, siehe dazu [11, 66, 67]. Konkret kann man fordern, dass bei zwei gewählten Größen³² die erste post-Newtonsche Korrektur keinen Beitrag zur Newtonschen Ordnung liefert.³³

Im Newtonschen Fall berechnete man aus der (zunächst unbekannten) Oberflächenfunktion mittels des Poisson-Integrals einen Ausdruck für das Potential im Außenraum. Dann bestimmte man die freien Koeffizienten so, dass die Gleichgewichtsbedingung (1.14) bis zur betrachteten Ordnung in σ erfüllt ist. Insbesondere war es (im homogenen Fall) nicht nötig, den Verlauf von Druck und Potential im Inneren des Rings zu kennen. Nachdem der Ring, und insbesondere dessen Oberfläche, bis zu einer gewissen Ordnung in σ bekannt waren, konnten die inneren Größen berechnet werden.

Hier wählt man einen anderen, einfacheren Weg, bei dem kein Poisson-Integral bzw. verallgemeinertes Poisson-Integral auftritt.³⁴ Dazu löst man simultan (d.h. Ordnung für Ordnung in σ) zum Äußeren auch das Innere des Rings. Im Folgenden wird d als gegebener Parameter betrachtet, und Größen, die nur noch von d abhängen, werden als bekannt angesehen. In der q -ten Ordnung müssen im Äußeren nur noch die Konstanten F_{lq} und G_{lq} bestimmt werden, wohingegen für das Innere des Rings Differentialgleichun-

³²Unendlich lange Zylinder (und auch nichtrotierende, statische Kugeln) werden bereits durch eine Größe, etwa den Zentraldruck, vollständig bestimmt. Entsprechend kann dann nur von einer Größe verlangt werden, dass es für sie keine post-Newtonsche Korrektur gibt.

³³Wenn man höhere post-Newtonsche Ordnungen betrachtet, siehe [66, 67], hat man noch mehr Freiheiten. Beispielsweise kann man dann fordern, dass bei zwei Größen die erste und auch höhere post-Newtonsche Korrekturen verschwinden.

³⁴Insbesondere muss somit der verallgemeinerte Laplace-Operator nicht invertiert werden.

gen für die $N_{qk}^i(y)$ und $w_{qk}^i(y)$ zu lösen sind. Deren Lösungen enthalten zunächst je zwei freie Koeffizienten, wovon einer durch die Forderung, dass die Lösung bei $y = 0$ regulär ist, bestimmt werden kann. Die übrigen $2(q + 1)$ Koeffizienten werden zusammen mit den $2(q + 1)$ Koeffizienten F_{lq} und G_{lq} durch die Übergangsbedingungen (2.67), (2.68) (bzw. (2.70)) und (2.69) bestimmt. Fourier-entwickelt in $\cos(k\chi)$ sind das genau $4(q + 1)$ Gleichungen. Da in die Übergangsbedingung (2.69) die Funktion y_2 eingeht, enthalten die daraus in der q -ten Ordnung resultierenden Gleichungen die unbekannten Koeffizienten κ_{qk} . Das bedeutet: Einige der bereits „gelösten“ Koeffizienten hängen von den κ_{qk} ab. Diese q unbekannten κ_{qk} werden zusammen mit dem Koeffizienten L_q durch die Schwerpunktsbedingung (2.66) und die Gleichung (2.72) bestimmt. Da die rechte Seite von (2.72) konstant ist, gilt dies auch für die linke Seite. In der q -ten Ordnung ergibt das q Gleichungen für die Koeffizienten von $\cos(k\chi)$ ($k = 1, \dots, q$). Den $q + 1$ Unbekannten L_q, κ_{qk} ($k = 1, \dots, q$) stehen also $q + 1$ Gleichungen gegenüber.³⁵ Das Absolutglied (Koeffizient von $\cos(0\chi)$) der q -ten Ordnung von (2.72) liefert einen Zusammenhang zwischen L_{q+1} und g_q , der zur Berechnung von q_{q0} benötigt wird. Die Gleichung (2.64) liefert schließlich die Funktion \tilde{p}_4 in q -ter Ordnung, d.h. Fourier-entwickelt in $\cos(k\chi)$ die Funktionen q_{qk} . Dabei gehen in die Funktion q_{q0} die unbekannten Größen L_{q+1} und g_q ein, wobei aber genau die benötigte Kombination bekannt ist.

2.4.6 Lösung der ersten post-Newtonschen Ordnung

Die nullte Ordnung: σ^0

In führender Ordnung in σ lautet die erste post-Newtonsche Korrektur zur Oberfläche

$$y_2(\chi) = \pi\sigma^2[d + o(\sigma^0)]. \quad (2.87)$$

Wie es bei y_0 der Fall war, hängt auch y_2 in dieser Ordnung nicht von χ ab, und die Schwerpunktsbedingung (2.66) ist automatisch erfüllt. Die Gleichung (2.61) ergibt im Inneren des Rings die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w_{00}^i}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dw_{00}^i}{dy} + 16 = 0 \quad (2.88)$$

mit der Lösung

$$w_{00}^i = -4y^2 + C_1 \ln y + C_2. \quad (2.89)$$

³⁵Diese Zählung gilt nur für $q > 0$. Für $q = 0$ ist hier nichts zu lösen, denn es gibt keinen Koeffizienten L_0 , siehe (2.83), und die Schwerpunktsbedingung ist in nullter Ordnung (unabhängig von d) automatisch erfüllt.

Damit die Lösung regulär bei $y = 0$ ist, muss $C_1 = 0$ gelten. Die Außenlösung lautet

$$w_{00}^a = -\frac{G_{10}}{2}(\Lambda - \ln y). \quad (2.90)$$

Die Übergangsbedingungen (2.67) ergeben

$$G_{10} = -16 \quad \text{und} \quad C_2 = 8\Lambda + 4. \quad (2.91)$$

Die verallgemeinerte Poisson-Gleichung (2.63) reduziert sich auf

$$\frac{d^2 N_{00}^i}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dN_{00}^i}{dy} + 20y^2 - 24\Lambda - 58 = 0 \quad (2.92)$$

mit der Lösung

$$N_{00}^i = -\frac{5}{4}y^4 + \left(6\Lambda + \frac{29}{2}\right)y^2 + C_3 \ln y + C_4. \quad (2.93)$$

Die Regularität bei $y = 0$ ergibt $C_3 = 0$. Die Außenlösung lautet

$$N_{00}^a = F_{10}(\Lambda + 2 - \ln y). \quad (2.94)$$

Die Übergangsbedingungen (2.69) und (2.70) legen die Konstanten

$$F_{10} = -12\Lambda - 4d - 24 \quad \text{und} \quad C_4 = -12\Lambda^2 - 54\Lambda - 4\Lambda d - 8d - \frac{245}{4} \quad (2.95)$$

fest. Geht man damit in die Gleichgewichtsbedingung (2.64), erhält man

$$q_{00} = \frac{7}{4}y^4 - (4\Lambda + 14)y^2 + \frac{41}{8}\Lambda^2 + \left(\frac{743}{16} + 4d\right)\Lambda + \frac{7273}{128} + 8d + \frac{\sqrt{4\Lambda + 3}}{2}L_1 - g_0. \quad (2.96)$$

Damit der Druck \tilde{p} auf der Oberfläche verschwindet (2.37), muss

$$g_0 - \frac{\sqrt{4\Lambda + 3}}{2}L_1 = \frac{41}{8}\Lambda^2 + \left(\frac{679}{16} + 4d\right)\Lambda + \frac{5705}{128} + 6d \quad (2.97)$$

gelten. Damit folgt

$$q_{00} = \frac{7}{4}y^4 - (4\Lambda + 14)y^2 + 4\Lambda + \frac{49}{4} + 2d. \quad (2.98)$$

In führender Ordnung in σ ergibt sich für den Druck also, siehe auch (1.64) und (1.77),

$$\begin{aligned} \tilde{p} = & \pi[1 - y^2 + o(\sigma^0)]\sigma^2\varepsilon^2 + \pi^2 \left[\frac{7}{4}y^4 - (4\Lambda + 14)y^2 + 4\Lambda + \frac{49}{4} + 2d + o(\sigma^0) \right] \sigma^4\varepsilon^4 \\ & + O(\varepsilon^6). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Wie für Newtonsche Ringe (siehe Kapitel 1.1.3), hängt auch hier in der führenden Ordnung in σ nichts vom Winkel χ ab, und der Ring ist äquivalent zu einem unendlich langen, selbstgravitierenden Zylinder. In post-Newtonscher Näherung sind solche Zylinder in [15] untersucht worden, und es bietet sich somit die Möglichkeit, die Ergebnisse zu vergleichen. Dazu sind jedoch invariante Größen notwendig, wie etwa der *wahre Radius*

$$r_w := \int_0^r \sqrt{g_{rr}} dr' = \int_0^r e^{\psi(r')} dr' \quad (2.100)$$

und dessen dimensionslose Form

$$y_w := \frac{r_w}{a}. \quad (2.101)$$

In erster post-Newtonscher Ordnung gilt

$$e^\psi = 1 + \psi_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) = 1 - \nu_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \quad (2.102)$$

und es folgt

$$y_w = y + \pi \left[(2\Lambda + 5)y - \frac{y^3}{3} + o(\sigma^0) \right] \sigma^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4). \quad (2.103)$$

Die Umkehrung dieser Reihe führt auf

$$y = y_w - \pi \left[(2\Lambda + 5)y_w - \frac{y_w^3}{3} + o(\sigma^0) \right] \sigma^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4). \quad (2.104)$$

Setzt man dies in (2.99), erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{p} = & \pi[1 - y_w^2 + o(\sigma^0)]\sigma^2\varepsilon^2 + \pi^2 \left[\frac{13}{12}y_w^4 - 4y_w^2 + 4\Lambda + \frac{49}{4} + 2d + o(\sigma^0) \right] \sigma^4\varepsilon^4 \\ & + O(\varepsilon^6). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Die (wahre) Oberfläche mit $\tilde{p} = 0$ ergibt sich daraus zu

$$y_{w,Ob} = \frac{r_{w,Ob}}{a} = 1 + [\pi d_w + o(\sigma^0)]\sigma^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad \text{mit} \quad d_w = d + 2\Lambda + \frac{14}{3}. \quad (2.106)$$

Dieses Ergebnis kann man alternativ mittels (2.103) aus dem bekannten Koordinatenradius der Oberfläche berechnen.

Eine analoge Rechnung ist für den *Umfangsradius* des Ringquerschnitts bzw. Zylinders³⁶

$$r_U := \sqrt{g_{\chi\chi}(r)} = re^\psi, \quad y_U := \frac{r_U}{a} \quad (2.107)$$

möglich. In Abhängigkeit von diesem Radius lautet der Druck

$$\tilde{p} = \pi[1 - y_U^2 + o(\sigma^0)]\sigma^2\varepsilon^2 + \pi^2 \left[-\frac{1}{4}y_U^4 - 4y_U^2 + 4\Lambda + \frac{49}{4} + 2d + o(\sigma^0) \right] \sigma^4\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6). \quad (2.108)$$

Für die Oberfläche ergibt sich

$$y_{U,Ob} = \frac{r_{U,Ob}}{a} = 1 + [\pi d_U + o(\sigma^0)]\sigma^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad \text{mit} \quad d_U = d + 2\Lambda + 4. \quad (2.109)$$

Bei der in [15] verwendeten Methode zur post-Newtonschen Berechnung von Zylindern hat der Zentraldruck in allen post-Newtonschen Ordnungen den gleichen Wert. Damit die erste post-Newtonsche Korrektur beim Druck (2.105) keinen Beitrag zum Zentraldruck liefert, muss man die Wahl

$$d = -2\Lambda - \frac{49}{8}, \quad d_w = -\frac{35}{24} \quad \text{und} \quad d_U = -\frac{17}{8} \quad (2.110)$$

treffen. Mit dieser Wahl ergibt sich aus (2.106) und (2.109) in Konsistenz mit den Formeln (6.10) und (6.11) aus [15]

$$y_{w,Ob} = 1 - \frac{35}{24}\pi\sigma^2\varepsilon^2[1 + o(\sigma^0)] + O(\varepsilon^4) \quad (2.111)$$

und

$$y_{U,Ob} = 1 - \frac{17}{8}\pi\sigma^2\varepsilon^2[1 + o(\sigma^0)] + O(\varepsilon^4). \quad (2.112)$$

Der Druck als Funktion des wahren Radius sowie als Funktion des Umfangsradius ist

³⁶Diesen Radius bitte nicht mit (2.46) verwechseln.

zwar in [15] nicht direkt angegeben, jedoch ist es kein Problem, diese Funktionen mit dem dort präsentierten Verfahren zu berechnen: Die Ergebnisse decken sich bei der Wahl (2.110) tatsächlich mit (2.105) und (2.108).

Die höheren Ordnungen in σ können analog zum Newtonschen Fall iterativ bestimmt werden und stellen keine prinzipiellen Schwierigkeiten dar. Konkret wurde die Rechnung bis zur siebten Ordnung durchgeführt.

Zwei Konsistenztests

Die Übergangsbedingungen³⁷ (2.5) bieten hier keinen unabhängigen Test, da die relativistischen Potentiale so bestimmt wurden, dass diese Bedingungen erfüllt sind. Eine echte Probe besteht jedoch im Vergleich des integralen Ausdrucks für die Gravitationsmasse (2.40) mit dem Ausdruck, der sich aus dem Fernfeld von ν gemäß (2.11) ergibt. Die post-Newtonsche Entwicklung führt auf die Ausdrücke (J.4) und

$$M = 2\pi^2\mu a^3\sigma^{-1} \left[\sum_{i=0}^q \left(\alpha_{1i} - \frac{\pi}{2}\varepsilon^2\sigma^2 F_{1i} \right) \sigma^i + (1 + \varepsilon^2\sigma^2)o(\sigma^q) + O(\varepsilon^4) \right], \quad (2.113)$$

siehe (1.38), (2.79) und (1.37). Es zeigt sich, dass beide Ausdrücke bis zur Ordnung $q = 7$ übereinstimmen.³⁸ Ein analoger Test ist für den Drehimpuls möglich, der im Fernfeld des Potentials ω abgelesen werden kann, siehe (2.11). In erster post-Newtonscher Ordnung ergibt sich für den Newtonschen Drehimpuls:³⁹

$$J_N = -\frac{\pi^2}{8}\sqrt{G\mu^3}a^5\sigma^{-3}\tilde{\Omega}_1 \left(\sum_{i=0}^q G_{1i}\sigma^i + o(\sigma^q) \right), \quad (2.114)$$

siehe (2.81) und (I.25). Tatsächlich folgt damit bis zur Ordnung $q = 7$ der bekannte Newtonsche Drehimpuls.

2.4.7 Diskussion der post-Newtonschen Ergebnisse

Die erste post-Newtonsche Ordnung der homogenen Ringe wurde explizit bis zur siebten Ordnung in σ berechnet. Im Folgenden werden damit einige konkrete Ringe berechnet und mit numerisch bestimmten relativistischen Ringen verglichen. Die Abweichungen zu den numerischen Werten haben dabei im Allgemeinen zwei Ursachen: Höhere Glieder

³⁷Wie bereits diskutiert wurde, fixiert die Forderung nach der Stetigkeit der Ableitungen erst das Koordinatensystem.

³⁸Für die Newtonschen Anteile war dies ohnehin klar, siehe Fußnote 31.

³⁹Die erste post-Newtonsche Korrektur des Drehimpulses kann erst in zweiter post-Newtonscher Näherung mithilfe von $\tilde{\omega}_4$ aus dem Fernfeld bestimmt werden.

Tabelle 2.1: Vergleich von Newtonschen und post-Newtonschen Ergebnissen (erster post-Newtonscher Ordnung, 1pN) in siebter Ordnung in σ mit numerischen Werten für den relativistischen Ring mit $A = 0,7$ und $Z_0 = 0,05$.

numerische Werte	Relativfehler				
	Newtonsch	1pN: $d = 0$	1pN: $d = d_\Omega$	1pN: $d = d_J$	1pN: $d = d_M$
$\check{\Omega} = 4,9108 \cdot 10^{-1}$	$-2,0 \cdot 10^{-2}$	$-1,5 \cdot 10^{-3}$	$-3,1 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$
$\check{J} = 2,3168 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-3}$	$-7,3 \cdot 10^{-3}$	$-2,1 \cdot 10^{-3}$
$\check{M} = 7,9661 \cdot 10^{-3}$	$8,6 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$-4,6 \cdot 10^{-3}$	$-9,1 \cdot 10^{-4}$
$\check{M}_B = 8,0842 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$9,8 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-3}$	$-3,8 \cdot 10^{-3}$	$-8,4 \cdot 10^{-4}$
$\check{R}_U = 2,8483 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$-4,5 \cdot 10^{-3}$	$-2,6 \cdot 10^{-3}$

in σ und höhere Glieder in ε werden vernachlässigt. Die Newtonschen Terme, die sogar bis zur 20. Ordnung in σ bekannt sind, werden dabei (konsequenterweise) auch nur bis zur siebten Ordnung verwendet. Spricht man im Folgenden vom post-Newtonschen Ergebnis in q -ter Ordnung in σ , ist damit gemeint, dass nur die entsprechenden Newtonschen und post-Newtonschen Terme mitgenommen wurden. Durch diese Wahl lässt sich der Einfluss der post-Newtonschen Korrektur klarer zeigen, denn jeder Newtonsche Term einer Reihe in σ besitzt damit ein post-Newtonsches Pendant. Dazu ein Beispiel: Die in σ führenden Terme von ν_2^i und ν_4^i sind

$$\nu_2^i = \frac{U^i}{G\mu b^2} = -\pi\sigma^2 U_{00}(y) + o(\sigma^2) \quad \text{und} \quad \nu_4^i = \pi^2\sigma^4 N_{00}^i(y) + o(\sigma^4). \quad (2.115)$$

Man beachte die unterschiedlichen Exponenten von σ . Dies führt dazu, dass (abgesehen vom konstanten Faktor $-\pi$) die Funktion $\sigma^2\varepsilon^2 N_{00}^i$ als post-Newtonsche Korrektur zu U_{00} bezeichnet werden kann. Analoges gilt für die höheren Terme in σ . Denselben Faktor $\sigma^2\varepsilon^2$ findet man zwischen sämtlichen zugehörigen Koeffizienten. Der Parameter $\varepsilon' := \sigma\varepsilon$ (siehe auch Fußnote 22) eignet sich daher besser als ε zur Abschätzung der Größenordnung der relativen post-Newtonschen Korrektur (relativ zu den Newtonschen Werten). Wenn man zwei geeignete Größen (und die Massendichte) vorgibt, werden die Größen ε , σ und deren Produkt ε' für den zugehörigen Newtonschen und post-Newtonschen Ring (d sei gewählt) im Allgemeinen verschiedene Werte haben.

In der Tabelle 2.1 werden für den homogenen Ring mit Radienverhältnis $A = 0,7$ und Rotverschiebung $Z_0 = 0,05$ Newtonsche und post-Newtonsche Werte für verschiedene physikalische Größen (siehe Anhang J) mit genauen numerischen Werten (siehe Tab. 1 in [6]) verglichen. Dabei sind dimensionslose Größen gemäß

$$\frac{\check{\Omega}^2}{\Omega^2} = \frac{1}{G\mu}, \quad \frac{\check{J}}{J} = \frac{G^2\mu}{c^5}, \quad \frac{\check{M}}{M} = \frac{\check{M}_B}{M_B} = \frac{G^{3/2}\mu^{1/2}}{c^3}, \quad \frac{\check{b}}{b} = \frac{\check{R}_U}{R_U} = \frac{G^{1/2}\mu^{1/2}}{c} \quad (2.116)$$

verwendet worden. Insbesondere gilt

$$\check{b} = \frac{\sqrt{G\mu}b}{c} = \varepsilon. \quad (2.117)$$

In der Newtonschen Gravitationstheorie gibt es (streng genommen) keine Rotverschiebung, und es ist daher nicht ohne Weiteres klar, welcher Newtonsche Ring mit $A = 0,7$ gemeint ist. Jedoch lässt sich der führende Term der relativen Rotverschiebung aus der Newtonschen Größe V_0 berechnen: $Z_0 = -V_0/c^2$ bzw. $Z_0 = \gamma_2\varepsilon^2 = \gamma_2\check{b}^2$. Damit ist klar definiert, welcher Newtonsche Ring gemeint ist.⁴⁰ Für die post-Newtonschen Ringe wurden für die freie Konstante d verschiedene Wahlen getroffen. Am einfachsten ist es, die Konstante gleich null zu setzen. Wie bereits erwähnt, ist es jedoch auch möglich, d so zu bestimmen, dass es für eine gewünschte Größe keinen post-Newtonschen Beitrag gibt. So verschwindet etwa für $d = d_\Omega$ der post-Newtonsche Beitrag zur Winkelgeschwindigkeit, d. h. es gilt $\check{\Omega}_3 = 0$. Der post-Newtonsche Ring besitzt also denselben Wert für Ω (und gemäß (2.52) auch denselben Wert für b), wie der zugehörige Newtonsche Vergleichsring⁴¹. Analog bedeutet $d = d_J$ bzw. $d = d_M$, dass es keinen post-Newtonschen Beitrag zu J bzw. M gibt. Es zeigt sich, dass ε' nicht besonders stark von der konkreten Wahl von d abhängt. Es gilt in diesem Beispiel stets $\varepsilon' \sim 0,04$.⁴² Einen Eindruck davon, wie relativistisch die Konfiguration ist, gewinnt man auch aus einer charakteristischen (Dreier-)Geschwindigkeit: Bei $\varrho = b$, $z = 0$ (Schwerpunkt des Querschnitts) ist $v/c \sim 0,11$. Die post-Newtonschen Ergebnisse liefern gegenüber den Newtonschen Werten deutliche Verbesserungen: Die relativen Abweichungen zu den genauen numerischen Werten sind etwa eine Größenordnung kleiner. Weiterhin beobachtet man, dass die Relativfehler, und sogar deren Vorzeichen, von der konkreten Wahl von d abhängen. Von den betrachteten Möglichkeiten liefert die Wahl $d = d_M$, zumindest für diesen konkreten Ring, die genauesten Ergebnisse. In [67] sind entsprechende Effekte für den sphäroidalen Fall diskutiert wurden, siehe insbesondere Tab. 2 und Abb. 2 ebd.⁴³ Die

⁴⁰Diese Zuordnung ist freilich nicht eindeutig; alternativ könnte man etwa U'_0 und V_0 einander zuordnen. Aber auch bei anderen Größen hat man Freiheiten. So könnte man der Newtonschen Masse die baryonische Masse oder die Gravitationsmasse zuordnen und dem Newtonschen Radienverhältnis das Koordinaten-Radienverhältnis oder beispielsweise auch das Verhältnis der wahren Radien.

⁴¹Dieser Newtonsche Ring ($A \neq 0,7$ und $Z_0 \neq 0,05$) ist in der Tabelle nicht eingetragen.

⁴²Für diesen Ring ($A = 0,7$, $Z_0 = 0,05$) gilt für sämtliche betrachteten post-Newtonschen Konfigurationen (unabhängig von d) und auch für die Newtonsche Konfiguration $\sigma \sim (1 - A)/2 = 0,15$.

⁴³Um Missverständnissen vorzubeugen, sei erwähnt, dass dort die Absolutbeträge der relativen Abweichungen angegeben sind, [68].

Tabelle 2.2: Vergleich von Newtonschen und post-Newtonschen Ergebnissen (erster Ordnung) für die dimensionslose Winkelgeschwindigkeit $\check{\Omega}$ des relativistischen Rings mit $A = 0,7$ und $Z_0 = 0,05$ bei verschiedenen Ordnungen q in σ und verschiedenen Wahlen für d . Die numerischen Werte für den relativistischen und den Newtonschen Ring lauten $\check{\Omega}_{\text{num}} = 0,491\,08$ und $\check{\Omega}_{\text{N,num}} = 0,481\,09$, siehe Tab. 1 in [6].

q	Newtonsch	1pN: $d = 0$	1pN: $d = d_\Omega$	1pN: $d = d_J$	1pN: $d = d_M$
3	0,482 74	0,492 08	0,492 65	0,494 26	0,493 71
5	0,481 35	0,490 59	0,491 17	0,492 79	0,492 24
7	0,481 14	0,490 36	0,490 93	0,492 55	0,492 00
20	0,481 09				

Tabelle 2.3: Vergleich von Newtonschen und post-Newtonschen Ergebnissen (erster post-Newtonscher Ordnung, 1pN) in siebter Ordnung in σ mit numerischen Werten für den relativistischen Ring mit $A = 0,7$ und $Z_0 = 0,5$.

numerische Werte	Relativfehler				
	relativistisch	Newtonsch	1p: $d = 0$	1pN: $d = d_\Omega$	1pN: $d = d_J$ 1pN: $d = d_M$
$\check{\Omega} = 5,5491 \cdot 10^{-1}$		$-1,3 \cdot 10^{-1}$	$-2,9 \cdot 10^{-2}$	$5,4 \cdot 10^{-3}$	$9,4 \cdot 10^{-1}$ $2,7 \cdot 10^{-1}$
$\check{J} = 2,8624 \cdot 10^{-2}$		1,9	$5,2 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	$-6,5 \cdot 10^{-1}$ $-2,9 \cdot 10^{-1}$
$\check{M} = 1,4018 \cdot 10^{-1}$		$9,5 \cdot 10^{-1}$	$4,0 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$-3,8 \cdot 10^{-1}$ $-1,4 \cdot 10^{-1}$
$\check{M}_B = 1,5659 \cdot 10^{-1}$		$7,5 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$-3,7 \cdot 10^{-1}$ $-1,4 \cdot 10^{-1}$
$\check{R}_U = 7,4643 \cdot 10^{-1}$		$2,4 \cdot 10^{-1}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	$-4,6 \cdot 10^{-1}$ $-2,3 \cdot 10^{-1}$

Abweichungen zu den numerischen Werten sind für diesen Ring ($A = 0,7$, $Z_0 = 0,05$) im Wesentlichen darin begründet, dass man nur bis zur ersten post-Newtonschen Ordnung gegangen ist. Davon kann man sich überzeugen, wenn man die Tabelle 2.2 betrachtet. Dort sind Newtonsche und post-Newtonsche Werte für $\check{\Omega}$ in verschiedenen Ordnungen q angegeben.

In der Tabelle 2.3 sind für einen weiteren relativistischen Ring mit größerer Rotverschiebung $Z_0 = 0,5$ (wieder mit dem Radienverhältnis $A = 0,7$) genaue numerische Werte (siehe Tab. 1 in [6]) und relative Abweichungen von Näherungslösungen dargestellt. Für diesen Ring bietet die Newtonsche Lösung keine gute Näherung.⁴⁴ Jedoch sind auch die post-Newtonschen Näherungen kaum besser. Einzelne Größen sind sogar schlechter als beim Newtonschen Ring. Dieses Ergebnis kommt nicht unerwartet, wenn man ε' berechnet. Recht unabhängig von der konkreten Wahl von d ergibt sich $\varepsilon' \sim 0,12$. Gegenüber dem zuvor diskutierten Fall ($Z_0 = 0,05$) ist ε'^2 also etwa eine Größenordnung größer, was letztlich vom Faktor 10 zwischen den beiden vorgegebenen Rotverschiebungen herrührt. Im Allgemeinen wird die erste post-Newtonsche Näherung

⁴⁴Dieser und erst recht der zuvor diskutierte Ring mit $Z_0 = 0,05$ besitzen noch keine Ergosphäre, siehe Abb. 3 in [6].

gerade dann gut sein, wenn die post-Newtonschen Beiträge nur kleine Korrekturen liefern. Das heißt aber, dass dann bereits die Newtonsche Näherung brauchbar sein muss.

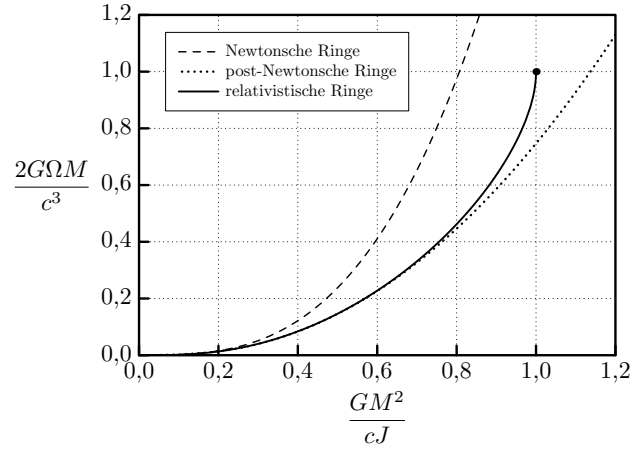


Abbildung 2.4: $2G\Omega M/c^3$ in Abhängigkeit von $GM^2/(cJ)$ für homogene Ringe mit dem Radienverhältnis $A = 0,99$. Dargestellt sind Newtonsche und post-Newtonsche Ringe ($d = 0$) in Ordnung $q = 2$ in σ und numerisch bestimmte relativistische Ringe.

Weiterhin ist in der Abbildung 2.4 für das vorgegebene Radienverhältnis $A = 0,99$ die Newtonsche, die post-Newtonsche ($d = 0$) und die relativistische Kurve, für $2G\Omega M/c^3$ in Abhängigkeit von $GM^2/(cJ)$ dargestellt. Am Punkt $2G\Omega M/c^3 = GM^2/(cJ) = 1$ geht der (relativistische) Ring parametrisch zum Schwarzen Loch über. Auch an diesem Bild sieht man, dass die post-Newtonsche Korrektur in der Nähe des Newtonschen Grenzfalles eine deutliche Verbesserung gegenüber den Newtonschen Werten bringt. Ein weiteres Beispiel von diesem Verhalten findet man in Abbildung 2.5, die den Druckverlauf in der Äquatorebene des Rings in den verschiedenen Fällen zeigt.

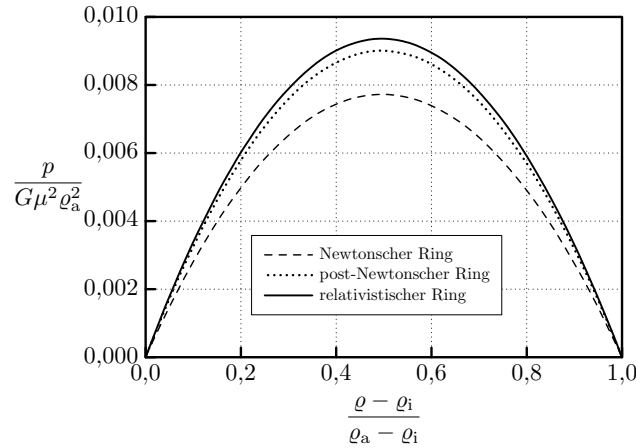


Abbildung 2.5: Der Druck in der Äquatorebene für homogene Ringe mit dem Radienverhältnis $A = 0,9$ und der Rotverschiebung $Z_0 = 0,1$. Die Kurven für den Newtonschen und post-Newtonschen Druckverlauf ($d = 0$) sind analytisch bestimmt (Ordnung $q = 2$), wohingegen die relativistische Kurve numerisch berechnet wurde.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden ringförmige Gleichgewichtsfiguren mithilfe von Reihenentwicklungen untersucht und die so erhaltenen Ergebnisse mit numerischen Resultaten verglichen. Für Newtonsche, homogene Ringe gelang es, aufbauend auf Dysons Berechnungen [22, 23] zur vierten Ordnung, ein iteratives Näherungsverfahren für beliebig hohe Ordnungen zu entwickeln. Mithilfe des Computeralgebra-Programms MapleTM (Waterloo Maple Inc.) wurde das Verfahren explizit bis zur 20. Ordnung durchgeführt. Die resultierende Näherung ist für Ringe mit dem Radienverhältnis $A = 0,9$ extrem gut (~ 16 Stellen), siehe Tab. 1.1; für Ringe mit $A = 0,2$ sind die Relativfehler im Bereich einiger Prozent, siehe Tab. 1.3.

Ohne Kenntnis von Ostrikers Arbeiten [62, 63] wurde das entwickelte Iterationsverfahren dann auf polytrope Ringe verallgemeinert. Dabei wurden nicht nur Ostrikers Ergebnisse für polytrope Ringe mit Polytropenindex $n = 1$ in erster Ordnung bestätigt, sondern auch die nächsten beiden Ordnungen berechnet. Nur für diesen speziellen Wert des Polytropenindex (und den homogenen Fall $n \rightarrow 0$) ist die auftretende Differentialgleichung, eine verallgemeinerte Lane-Emden-Gleichung, linear und konnte analytisch gelöst werden. Das bei beliebiger Zustandsgleichung gültige Resultat (1.55) war Ostriker auch schon bekannt, wenn auch nur für polytrope Ringe. In der vorliegenden Arbeit sind jedoch nicht nur diese und andere Vertiefungen gegenüber Ostriker zu erwähnen, sondern auch die Vergleiche mit modernen numerischen Resultaten. Ein besonders interessanter Fakt soll noch betont werden: Während es für sphäroidale Gleichgewichtsfiguren eine obere Grenze für den Polytropenindex gibt (im kugelsymmetrischen Fall gilt $n < 5$), existieren im toroidalen Fall zu allen Polytropenindizes Lösungen, selbst im „isothermen“ Grenzfall $n \rightarrow \infty$.

Weiterhin wurde ein Roche-Modell für Ringe betrachtet. Dort wurde die Flüssigkeit des Rings nicht selbstgravitierend, sondern im vorgegebenen Potential einer kreisförmigen Massenlinie behandelt. Diese Näherung führte auf algebraische Gleichungen, die sich leicht auswerten ließen. Es zeigte sich, dass das gewöhnliche Roche-Modell mit dem Potential einer Punktmasse als Grenzfall ($b' \rightarrow 0$) enthalten ist. Der Vergleich mit numerischen Resultaten zeigte, dass polytrope Ringe mit hohem Polytropenindex (und auch sphäroidale Konfigurationen, siehe Abb. 1.19) gut mittels des zugehörigen

Roche-Modells beschrieben werden können, siehe Abb. 1.18, 1.19 und Tab. 1.7, 1.8. Für unendlich dünne Ringe im Roche-Modell lassen sich die algebraischen Gleichungen, selbst für Ringe an der Massenabwurfsgrenze, analytisch lösen, und es gibt Hinweise dafür, dass diese Lösung den Grenzfall (selbstgravitierender) „isothermer“ Ringe beschreibt.

Die erste post-Newtonsche Näherung für homogene Ringe wurde bis zur siebten Ordnung im Parameter σ berechnet. Die führende Ordnung ist konsistent zu den post-Newtonschen Ergebnissen aus [15] für homogene, unendlich lange Zylinder. In zwei konkreten Beispielen, siehe Tab. 2.1 und Tab. 2.3, wurden post-Newtonsche Werte mit genauen numerischen Werten für den relativistischen Ring verglichen. Im ersten Fall brachte dies eine deutliche Verbesserung gegenüber den Newtonschen Werten. Im zweiten, dem relativistischeren Beispiel war dies nicht mehr der Fall, obwohl auch diese Konfiguration noch keine Ergosphäre besitzt.

Für beliebige Polytropenindizes kann die „Newtonsche“ Bindungsenergie in führender Ordnung in σ angegeben werden, siehe (2.76). Für polytrope Ringe mit $n = 1$ ist der Ausdruck sogar bis zur dritten Ordnung in σ bekannt.

Außerhalb der Aufgabenstellung dieser Arbeit stehen Fragen zur Stabilität der Gleichgewichtskonfigurationen, die insbesondere im Hinblick auf etwaige astrophysikalische Anwendungen wichtig sind. Bis auf wenige Ausnahmen, etwa wenn man die Instabilität einer Konfiguration an ihrer negativen Bindungsenergie erkennt, muss man zusätzliche Kenntnisse über die Materie haben, beispielsweise über deren Viskosität, die im Gleichgewicht keine Rolle spielt. Darüber hinaus ist zu bedenken, dass sich homogene Materie und ggf. polytrope Materie mit $n < 1$ (2.25) bei dynamischen Prozessen nicht mit den Prinzipien der Relativitätstheorie vertragen. Bei störungstheoretischen Untersuchungen wären also zusätzliche Annahmen nötig.

Leider konnten relativistische Ringe nicht ohne die post-Newtonsche Näherung betrachtet werden. Mit der Lösung der Feldgleichungen für einen homogenen, unendlich langen Zylinder hätte man dafür einen Zugang, nämlich die führende Ordnung in σ . Aber auch ohne diese Lösung kann man das Problem in höheren post-Newtonschen Ordnungen und höheren Ordnungen in σ angehen. Des Weiteren ist es eventuell für polytrope Ringe möglich, analytische post-Newtonsche Resultate zu erzielen. Vor allem natürlich für den Polytropenindex $n = 1$, da hier das Newtonsche Problem (mindestens) bis zur dritten Ordnung in σ gelöst werden konnte. Vielleicht können auch im post-Newtonschen Fall einige Aussagen in führender Ordnung in σ getroffen werden, die für einen beliebigen Polytropenindex oder gar für eine beliebige Zustandsgleichung gelten. Auch stellt sich die Frage, ob ein post-Newtonsches Roche-Modell für Ringe for-

muliert und gelöst werden kann. Für sphäroidale Konfigurationen hat Chandrasekhar in [18] dieses Problem gelöst. Solche Lösungen böten dann vielleicht gute Näherungen für relativistische Ringe mit hohem Polytropenindex, wenn die relativistischen Effekte nicht allzu stark sind.

Die in dieser Arbeit beschriebenen Methoden kann man vermutlich auch auf Ringe um einen Zentralkörper anwenden. Im Newtonschen Fall hat Ostriker dies in führender Ordnung in σ auch getan, wobei der (kugelsymmetrische) Zentralkörper dort einfach das Gravitationspotential einer Punktmasse hat. In höheren Ordnungen in σ müsste man konsequenterweise die Verformung des Zentralkörpers berücksichtigen.

Das Problem der ringförmigen Gleichgewichtsfiguren ist also noch lange nicht abschließend gelöst.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz und I. A. Stegun. *Pocketbook of mathematical functions*. Harri Deutsch, Thun, 1984.
- [2] M. Ansorg. Differentially rotating disks of dust: Arbitrary rotation law. *Gen. Rel. Grav.*, 33:309, 2001.
- [3] M. Ansorg, T. Fischer, A. Kleinwächter, R. Meinel, D. Petroff und K. Schöbel. Equilibrium configurations of homogeneous fluids in general relativity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 355:682, 2004.
- [4] M. Ansorg, A. Kleinwächter und R. Meinel. Highly accurate calculation of rotating neutron stars. *Astron. Astrophys.*, 381:L49, 2002.
- [5] M. Ansorg, A. Kleinwächter und R. Meinel. Highly accurate calculation of rotating neutron stars: Detailed description of the numerical methods. *Astron. Astrophys.*, 405:711, 2003.
- [6] M. Ansorg, A. Kleinwächter und R. Meinel. Relativistic Dyson rings and their black hole limit. *Astrophys. J. Lett.*, 582:L87, 2003.
- [7] M. Ansorg, A. Kleinwächter und R. Meinel. Uniformly rotating axisymmetric fluid configurations bifurcating from highly flattened Maclaurin spheroids. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 339:515, 2003.
- [8] M. Ansorg und R. Meinel. Differentially rotating disks of dust. *Gen. Rel. Grav.*, 32:1365, 2000.
- [9] M. Ansorg und D. Petroff. Black holes surrounded by uniformly rotating rings. *Phys. Rev. D*, 72(2):024019, 2005.
- [10] J. M. Bardeen. A variational principle for rotating stars in general relativity. *Astrophys. J.*, 162:71, 1970.
- [11] J. M. Bardeen. A reexamination of the post-Newtonian Maclaurin spheroids. *Astrophys. J.*, 167:425, 1971.
- [12] J. M. Bardeen, W. H. Press und S. A. Teukolsky. Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *Astrophys. J.*, 178:347, 1972.
- [13] J. M. Bardeen und R. V. Wagoner. Uniformly rotating disks in general relativity. *Astrophys. J.*, 158:L65, 1969.
- [14] J. M. Bardeen und R. V. Wagoner. Relativistic disks. I. Uniform rotation. *Astrophys. J.*, 167:359, 1971.
- [15] J. Bičák, T. Ledvinka, B. G. Schmidt und M. Zofka. Static fluid cylinders and their fields: Global solutions. *Class. Quantum Grav.*, 21:1583, 2004.
- [16] S. Chandrasekhar. The equilibrium of distorted polytropes. I. The rotational problem. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 93:390, 1933.
- [17] S. Chandrasekhar. The post-Newtonian effects of general relativity on the equilibrium of uniformly rotating bodies. II. The deformed figures of the Maclaurin spheroids. *Astrophys. J.*, 147:334, 1967.

- [18] S. Chandrasekhar. The post-Newtonian effects of general relativity on the equilibrium of uniformly rotating bodies. IV. The Roche model. *Astrophys. J.*, 148:645, 1967.
- [19] S. Chandrasekhar. *Ellipsoidal figures of equilibrium*. Dover Publications, New York, 1987.
- [20] S. Chandrasekhar und E. Fermi. Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field. *Astrophys. J.*, 118:116, 1953.
- [21] S. Chandrasekhar und N. R. Lebovitz. On the oscillations and the stability of rotating gaseous masses. III. The distorted polytropes. *Astrophys. J.*, 136:1082, 1962.
- [22] F. W. Dyson. The potential of an anchor ring. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 184:43, 1892.
- [23] F. W. Dyson. The potential of an anchor ring – part ii. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 184:1041, 1893.
- [24] R. Emden. *Gaskugeln*. Teubner, Leipzig, 1907.
- [25] Y. Eriguchi und I. Hachisu. Maclaurin hamburger sequence. *Astron. Astrophys.*, 148:289, 1985.
- [26] Y. Eriguchi und D. Sugimoto. Another equilibrium sequence of self-gravitating and rotating incompressible fluid. *Prog. Theor. Phys.*, 65:1870, 1981.
- [27] F. J. Ernst. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. *Phys. Rev.*, 167:1175, 1968.
- [28] T. Fischer, S. Horatschek und M. Ansorg. Uniformly rotating rings in general relativity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 364:943, 2005.
- [29] O. Forster. *Analysis 1*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, fünfte Auflage, 1999.
- [30] H. Goenner. Symmetry transformations for the generalized Lane-Emden equation. *Gen. Rel. Grav.*, 33:833, 2001.
- [31] H. Goenner und P. Havas. Exact solutions of the generalized Lane-Emden equation. *J. Math. Phys.*, 41:7029, 2000.
- [32] I. Hachisu. A versatile method for obtaining structures of rapidly rotating stars. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 61:479, 1986.
- [33] I. Hachisu und Y. Eriguchi. Bifurcations and phase transitions of self-gravitating and uniformly rotating fluid. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 204:583, 1983.
- [34] J. B. Hartle. *Gravity*. Addison Wesley, San Francisco, 2003.
- [35] J. B. Hartle und D. H. Sharp. Variational principle for the equilibrium of a relativistic, rotating star. *Astrophys. J.*, 147:317, 1967.
- [36] S. Horatschek und D. Petroff. A Roche model for uniformly rotating rings. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 392:1211, 2009.
- [37] G. P. Horedt. Exact solutions of the Lane-Emden equation in N -dimensional space. *Astron. Astrophys.*, 160:148, 1986.
- [38] J. H. Jeans. *Problems of cosmogony and stellar dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1919.
- [39] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237, 1963.
- [40] A. Kleinwächter. Persönliche Mitteilung, 2009.

- [41] W. Kley. Maclaurin discs and bifurcations to rings. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 282:234, 1996.
- [42] W. Kley. On relativistic discs and rings. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 287:26, 1997.
- [43] S. Kowalewsky. Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe. *Astronomische Nachrichten*, 111:37, 1885.
- [44] D. Kramer. Cylindrically symmetric static perfect fluids. *Class. Quantum Grav.*, 5:393, 1988.
- [45] D. Kramer und G. Neugebauer. Zu axialsymmetrischen stationären Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für das Vakuum. *Commun. Math. Phys.*, 10:132, 1968.
- [46] H. Labranche. Persönliche Mitteilung, 2009.
- [47] H. Labranche, D. Petroff und M. Ansorg. The parametric transition of strange matter rings to a black hole. *Gen. Rel. Grav.*, 39:129, 2007.
- [48] L. Lichtenstein. Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Dritte Abhandlung: Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper. *Math. Zeitschrift*, 13:82, 1922.
- [49] L. Lichtenstein. *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*. Springer, Berlin, 1933.
- [50] L. Lindblom. Stationary stars are axisymmetric. *Astrophys. J.*, 208:873, 1976.
- [51] L. Lindblom. On the symmetries of equilibrium stellar models. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 340:353, 1992.
- [52] R. Meinel. Black holes: A physical route to the Kerr metric. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 11:509, 2002.
- [53] R. Meinel. Quasistationary collapse to the extreme Kerr black hole. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 13:600, 2004.
- [54] R. Meinel. On the black hole limit of rotating fluid bodies in equilibrium. *Class. Quantum Grav.*, 23:1359, 2006.
- [55] R. Meinel. Quasi-stationary routes to the Kerr black hole. In *Proceedings of the Eleventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, Seite 2234, 2008.
- [56] R. Meinel, M. Ansorg, A. Kleinwächter, G. Neugebauer und D. Petroff. *Relativistic figures of equilibrium*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [57] E. A. Milne. The equilibrium of a rotating star. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 83:118, 1923.
- [58] P. Moon und D. E. Spencer. *Field theory handbook*. Springer, Berlin, 1961.
- [59] P. M. Morse und H. Feshbach. *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.
- [60] G. Neugebauer und R. Meinel. General relativistic gravitational field of a rigidly rotating disk of dust: Solution in terms of ultraelliptic functions. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3046, 1995.
- [61] J. Oppenheimer und G. Volkov. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55:374, 1939.
- [62] J. Ostriker. The equilibrium of polytropic and isothermal cylinders. *Astrophys. J.*, 140:1056, 1964.
- [63] J. Ostriker. The equilibrium of self-gravitating rings. *Astrophys. J.*, 140:1067, 1964.
- [64] J. Ostriker. Cylindrical Emden and associated functions. *Astrophys. J.*, 11:167, 1965.

- [65] T. Pätz. *Untersuchungen des Mass-Shedding-Limits rotierender Flüssigkeiten in Newtonscher und Einsteinscher Gravitationstheorie*. Diplomarbeit, Friedrich-Schiller-Universität, Jena, 2007.
- [66] D. Petroff. *Die Maclaurin-Ellipsoide in post-Newtonscher Näherung beliebig hoher Ordnung*. Dissertation, Friedrich-Schiller-Universität, Jena, 2003.
- [67] D. Petroff. Post-Newtonian Maclaurin spheroids to arbitrary order. *Phys. Rev. D*, 68:104029, 2003.
- [68] D. Petroff. Persönliche Mitteilung, 2009.
- [69] D. Petroff und S. Horatschek. Uniformly rotating homogeneous and polytropic rings in Newtonian gravity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 389:156, 2008.
- [70] D. Petroff und R. Meinel. Post-Newtonian approximation of the rigidly rotating disc of dust to arbitrary order. *Phys. Rev. D*, 63:064012, 2001.
- [71] H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta mathematica*, 7:259, 1885.
- [72] H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *C. R. Acad. Sci.*, 100:346, 1885.
- [73] H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Bull. Astr.*, 2:109, 1885.
- [74] H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Bull. Astr.*, 2:405, 1885.
- [75] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov und O. I. Marichev. *Integrals and series*, Band 3. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1990.
- [76] É. Roche. Essai sur la constitution et l'origine du système solaire. *Mém. de la section des sciences, Acad. des sciences et lettres de Montpellier*, 1:235, 1873.
- [77] S. L. Shapiro und M. Shibata. Collapse of a rotating supermassive star to a supermassive black hole: Analytic determination of the black hole mass and spin. *Astrophys. J.*, 577:904, 2002.
- [78] J. Stela und D. Kramer. The incompressible perfect fluid cylinder. *Acta Physica Polonica*, B21:843, 1990.
- [79] H. Stephani. *Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, dritte Auflage, 2004.
- [80] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers und E. Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [81] N. Stergioulas. Rotating stars in relativity, living rev. relativity, 2003. Online Publication: Referenced on June 21, 2003, <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-3>.
- [82] J. S. Stodólkiewicz. On the gravitational instability of some magneto-hydrodynamical systems of astrophysical interest. Part III. *Acta Astronomica*, 13:30, 1963.
- [83] R. Tooper. Adiabatic fluid spheres in general relativity. *Astrophys. J.*, 142:1541, 1965.
- [84] R. M. Wald. *General relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [85] C. Y. Wong. Toroidal figures of equilibrium. *Astrophys. J.*, 190:675, 1974.
- [86] Ya. B. Zel'dovich und I. D. Novikov. *Relativistic astrophysics*, Band 1. The University of Chicago Press, Chicago, 1971.

A Landau-Symbole

Hier soll die Bedeutung der verwendeten Landau-Symbole¹ o und O erklärt werden. Die Darstellung folgt dabei dem Lehrbuch [29].

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein Berührungspunkt² von D . Dann schreibt man

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0, x \in D, \quad (\text{A.1})$$

falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta. \quad (\text{A.2})$$

Anschaulich heißt das, dass f verschwindend klein wird im Vergleich mit g für $x \rightarrow x_0$. Und man schreibt

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0, x \in D, \quad (\text{A.3})$$

falls Konstanten $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ existieren, sodass

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta. \quad (\text{A.4})$$

Anschaulich heißt das, f ist höchstens von gleicher Größenordnung wie g für $x \rightarrow x_0$.

Beispielsweise gilt $\sigma^2 \ln \sigma = o(\sigma)$ für $\sigma \rightarrow 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Um das zu zeigen, muss man für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, sodass $|\sigma^2 \ln \sigma| \leq \varepsilon \sigma$ für alle $\sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $\sigma < \delta$. Ein solches δ ist $\delta := \min(1, \varepsilon^2/4)$. Für $0 < \sigma < \delta$ gilt nämlich³ $\sigma |\ln \sigma| = 2\sigma |\ln \sqrt{\sigma}| \leq 2\sigma(1 - \sqrt{\sigma})/\sqrt{\sigma} = 2\sqrt{\sigma}(1 - \sqrt{\sigma}) \leq 2\sqrt{\sigma} \leq \varepsilon$.

Im Gegensatz dazu gilt *nicht* $\sigma \ln \sigma = o(\sigma)$ für $\sigma \rightarrow 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, denn die Ungleichung $\sigma |\ln \sigma| \leq \varepsilon \sigma$ ist für alle $\sigma < e^{-\varepsilon}$ verletzt, und es gibt also kein δ mit der geforderten Eigenschaft.

¹Sie sind nach dem Mathematiker Edmund Landau (1877–1938) benannt.

²Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührungspunkt von $D \subseteq \mathbb{R}$, wenn es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen $a_n \in D$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. (Insbesondere ist damit jeder Punkt $a \in D$ ein Berührungspunkt von D .)

³Hierbei wird die Ungleichung $\ln x \geq (x - 1)/x$ für $x > 0$ benutzt. Für $0 < x < 1$ folgt daraus $|\ln x| \leq (1 - x)/x$.

B Koeffizienten für homogene Ringe

In den Tabellen B.1–B.4 sind weitere Koeffizienten für Ω_i , β_{ik} , $U_{ik}(y)$ und α_{li} für homogene Ringe angegeben.

Tabelle B.1: Koeffizienten Ω_i für homogene Ringe bis zur Ordnung $q = 9$ ($i = 2, 3, \dots, 10$).

i	Ω_i
2	$\Lambda + \frac{3}{4}$
3	0
4	$-\frac{1}{8}\Lambda - \frac{19}{96}$
5	0
6	$\frac{25}{128}\Lambda^3 + \frac{365}{1536}\Lambda^2 - \frac{2345}{18432}\Lambda - \frac{8989}{73728}$
7	0
8	$\frac{25}{64}\Lambda^4 + \frac{40235}{98304}\Lambda^3 - \frac{134255}{294912}\Lambda^2 - \frac{36493505}{56623104}\Lambda - \frac{34831813}{226492416}$
9	0
10	$\frac{134925}{131072}\Lambda^5 + \frac{2797535}{1572864}\Lambda^4 - \frac{50072105}{169869312}\Lambda^3 - \frac{1021727845}{509607936}\Lambda^2 - \frac{104581877693}{97844723712}\Lambda - \frac{49377918425}{391378894848}$

Tabelle B.2: Koeffizienten β_{ik} für homogene Ringe bis zur Ordnung $q = 9$. Außerdem gilt $\beta_{i0} = 0$. Die fettgedruckten Einträge sind in [22] inkorrekt.

$\backslash \begin{smallmatrix} k \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	—	—	—	—	—	—	—	—
2	0	$\frac{5}{8}\Lambda + \frac{35}{96}$	—	—	—	—	—	—	—
3	0	0	$\frac{5}{128}\Lambda - \frac{35}{3072}$	—	—	—	—	—	—
4	0	$\frac{5}{8}\Lambda^2 + \frac{95}{128}\Lambda + \frac{1145}{9216}$	0	$\frac{75}{256}\Lambda^2 + \frac{815}{2304}\Lambda + \frac{5089}{55206}$	—	—	—	—	—
5	$-\frac{25}{1024}\Lambda^2 - \frac{175}{24576}\Lambda + \frac{1225}{294912}$	0	$\frac{15}{256}\Lambda^2 + \frac{4955}{147456}\Lambda - \frac{63411}{3538944}$	0	$\frac{25}{512}\Lambda^2 + \frac{75}{4096}\Lambda - \frac{14455}{1179648}$	—	—	—	—
6	0	$\frac{5185}{4096}\Lambda^3 + \frac{4015}{110592}\Lambda^2 + \frac{49159}{49152}\Lambda + \frac{853225}{884736}\Lambda + \frac{34487}{1327104}$	0	$\frac{75}{128}\Lambda^3 + \frac{128545}{110592}\Lambda^2 + \frac{308395}{589824}\Lambda + \frac{17892169}{318504960}$	0	$\frac{625}{4096}\Lambda^3 + \frac{165825}{189824}\Lambda^2 + \frac{1097461}{7077888}\Lambda + \frac{7327349}{339738624}$	—	—	—
7	$-\frac{125}{2048}\Lambda^3 - \frac{76325}{179048}\Lambda^2 + \frac{28311552}{1313095} + \frac{169869312}{1313095}$	0	$\frac{1325}{8192}\Lambda^3 + \frac{109915}{442368}\Lambda^2 + \frac{18874368}{10583029} - \frac{4076863488}{1313095}$	0	$\frac{125}{1024}\Lambda^3 + \frac{9815}{73728}\Lambda^2 - \frac{56623104}{32985941} - \frac{1509949440}{1509949440}$	0	$\frac{375}{8192}\Lambda^3 + \frac{4825}{98304}\Lambda^2 - \frac{9437184}{7862435}\Lambda - \frac{268795}{28311552}$	—	—
8	0	$\frac{11935}{4096}\Lambda^4 + \frac{15693265}{2359296}\Lambda^3 + \frac{387327415}{84934656}\Lambda^2 + \frac{1947908992}{2146118688}\Lambda - \frac{21240691225}{195689447424}$	0	$\frac{48175}{32768}\Lambda^4 + \frac{299613275}{84934656}\Lambda^3 + \frac{86354441}{387327415}\Lambda^2 + \frac{163195481003}{2446118688}\Lambda + \frac{61946667647}{14676708556800}$	0	$\frac{1875}{4096}\Lambda^4 + \frac{1994875}{1769472}\Lambda^3 + \frac{1544984218}{6946718656}\Lambda^2 + \frac{20190760431}{101921587200}\Lambda + \frac{523810097561}{3424565329920}$	0	$\frac{21875}{262144}\Lambda^4 + \frac{2069375}{9437184}\Lambda^3 + \frac{7862435}{42467328}\Lambda^2 + \frac{114152177664}{114152177664}\Lambda + \frac{968695327}{342456532992}$	—
9	$-\frac{26875}{131072}\Lambda^4 - \frac{10803575}{28311552}\Lambda^3 - \frac{73203885}{10583029}\Lambda^2 + \frac{245384393}{10871635968}\Lambda + \frac{5148689159}{391378894848}$	0	$\frac{58565}{131072}\Lambda^4 + \frac{317810795}{339738624}\Lambda^3 + \frac{4061560685}{8192100013}\Lambda^2 - \frac{97844723712}{3261400790400}\Lambda - \frac{1033257753043}{23482733690880}$	0	$\frac{3125}{8192}\Lambda^4 + \frac{20750915}{28311552}\Lambda^3 + \frac{738672683}{280456831247}\Lambda^2 - \frac{3261400790400}{13297677452861}\Lambda - \frac{365286968524800}{9132174213120}$	0	$\frac{2625}{16384}\Lambda^4 + \frac{2597725}{9437184}\Lambda^3 + \frac{112005569}{112005569}\Lambda^2 - \frac{117378627479}{2283043563280}\Lambda - \frac{173703027451}{9132174213120}$	$\frac{625}{16384}\Lambda^4 + \frac{72125}{1048576}\Lambda^3 + \frac{4955105}{24955105}\Lambda^2 - \frac{70046365}{5435817984}\Lambda - \frac{1636799939}{260919263232}$	—

Tabelle B.3: Koeffizienten $U_{ik}(y)$ für homogene Ringe bis zur Ordnung $q = 7$.

$\frac{k}{i}$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$2\Lambda + 5 - y^2$	—	—	—	—	—	—	—
1	0	$(\Lambda + 1)y - \frac{1}{4}y^3$	—	—	—	—	—	—
2	$-\frac{1}{8}\Lambda - \frac{7}{32} + (\frac{1}{4}\Lambda + \frac{1}{4})y^2 - \frac{3}{32}y^4$	0	$(\Lambda + \frac{31}{48})y^2 - \frac{5}{48}y^4$	—	—	—	—	—
3	0	$(-\frac{13}{32}\Lambda - \frac{65}{192})y^3 - \frac{15}{128}y^5$	0	$(\frac{15}{64}\Lambda + \frac{175}{1536})y^3 - \frac{35}{768}y^5$	—	—	—	—
4	$\frac{25}{64}\Lambda^3 + \frac{295}{384}\Lambda^2 + \frac{3457}{9216}\Lambda + \frac{19}{576} + (-\frac{13}{128}\Lambda - \frac{65}{468})y^2 + (\frac{1}{128}\Lambda + \frac{51}{512})y^4 - \frac{21}{512}y^6$	0	$(\frac{5}{8}\Lambda^2 + \frac{311}{512}\Lambda + \frac{269}{36864})y^2 + (\frac{485}{368}\Lambda + \frac{32495}{18432})y^4 - \frac{5}{512}y^6$	0	$(\frac{455}{4608}\Lambda + \frac{4459}{110592})y^4 - \frac{21}{1024}y^6$	—	—	—
5	0	$(\frac{25}{2005}\Lambda^3 - \frac{355}{1356}\Lambda^2 - \frac{20405}{36864}\Lambda - \frac{73728}{36864})y + (\frac{5}{32}\Lambda^2 + \frac{155}{2048}\Lambda - \frac{9091}{16746})y^3 + (\frac{365}{28550}\Lambda + \frac{875}{16384})y^5 - \frac{12288}{16384}y^7$	0	$(\frac{15}{32}\Lambda^2 + \frac{25}{73728}\Lambda - \frac{100015}{1769472})y^3 + (\frac{4795}{36864}\Lambda + \frac{76223}{884736})y^5 - \frac{315}{8192}y^7$	0	$(-\frac{805}{18336}\Lambda + \frac{18539}{1769472})y^5 - \frac{77}{8192}y^7$	—	—
6	$\frac{25}{25}\Lambda^4 + \frac{95435}{862135}\Lambda^3 + \frac{589824}{551045}\Lambda^2 + (\frac{25}{28311552} + \frac{25}{512}\Lambda^3 - \frac{355}{11081})y^2 + (\frac{25}{294912})y^2 + (\frac{25}{465}\Lambda - \frac{9091}{16384}\Lambda - \frac{393216}{8192}\Lambda + \frac{14775}{196608})y^4 - \frac{6125}{196608}y^8$	0	$(\frac{335}{440125}\Lambda^3 + \frac{9895}{589824}\Lambda^2 + \frac{440125}{589824}\Lambda - \frac{1755973}{42467328})y^2 + (\frac{2975}{2975}\Lambda^2 + \frac{2975}{31315}\Lambda^4 + \frac{786432}{32011})y^4 - \frac{1575}{32768}y^8$	0	$(\frac{135}{4608}\Lambda^2 - \frac{1769472}{2765}\Lambda - \frac{824697}{79626240})y^4 + (\frac{92416}{1504909}\Lambda + \frac{35389440}{32768})y^8$	0	$(\frac{17549}{84746}\Lambda + \frac{243479}{42467328})y^8 - \frac{143}{32768}y^8$	—
7	0	$(\frac{25}{63}\Lambda^4 - \frac{40645}{98304}\Lambda^3 - \frac{2042065}{1179648}\Lambda^2 - \frac{58120985}{56623104}\Lambda - \frac{39130979}{33838624})y + (\frac{745}{2048}\Lambda^3 + \frac{73728}{2048}\Lambda^2 + \frac{2359296}{2048}\Lambda - \frac{6542965}{169869312})y^3 + (\frac{645}{8192}\Lambda^2 + \frac{27925}{767465}\Lambda - \frac{645475}{18874368})y^5 + (\frac{589824}{85225}\Lambda + \frac{539545}{14155776})y^7 - \frac{25725}{524288}y^9$	0	$(\frac{1485}{8192}\Lambda^3 + \frac{439675}{1769472}\Lambda^2 - \frac{246977}{28311552}\Lambda - \frac{513938083}{10192158720})y^3 + (\frac{442368}{442368}\Lambda^2 + \frac{190295}{14155776}\Lambda - \frac{117973177}{366669360})y^5 + (\frac{393449}{393449}\Lambda + \frac{94371840}{94371840})y^7 - \frac{8085}{262144}y^9$	0	$(\frac{12385}{1769472}\Lambda^2 + \frac{35497}{28311552}\Lambda - \frac{181782779}{20384317440})y^5 + (\frac{147456}{2961899}\Lambda + \frac{2961899}{141557760})y^7 - \frac{3003}{262144}y^9$	0	$(\frac{32417}{3538044}\Lambda + \frac{375383}{169869312})y^7 - \frac{2145}{1048576}y^9$

Tabelle B.4: Koeffizienten α_{ij} für homogene Ringe bis zur Ordnung $q = 8$.

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	$\frac{25}{128}\Lambda^2 + \frac{175}{768}\Lambda + \frac{1225}{18432}$	0	$\frac{25}{64}\Lambda^3 + \frac{68075}{410275}\Lambda^2 + \frac{2568475}{1179648}\Lambda + \frac{56623104}{56623104}$	0	$\frac{134925}{131072}\Lambda^4 + \frac{239525}{98304}\Lambda^3 + \frac{316929175}{169869312}\Lambda^2 + \frac{1001961695}{2116102111}\Lambda + \frac{2038431744}{97844723712}$
2	—	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{25}{32}\Lambda - \frac{175}{384}$	0	$-\frac{475}{512}\Lambda^2 - \frac{555}{512}\Lambda - \frac{965}{4008}$	0	$-\frac{10025}{4096}\Lambda^3 - \frac{1698785}{393216}\Lambda^2 - \frac{28823195}{123632507}\Lambda - \frac{14135776}{679477248}$	0
3	—	—	$\frac{5}{16}\Lambda + \frac{17}{96}$	0	$\frac{5}{16}\Lambda^2 + \frac{1315}{3072}\Lambda + \frac{9235}{73728}$	0	$\frac{1765}{2048}\Lambda^3 + \frac{1985}{1024}\Lambda^2 + \frac{4356505}{18119345}\Lambda + \frac{3338944}{84934656}$	0	$\frac{2195}{1024}\Lambda^4 + \frac{3052455}{524288}\Lambda^3 + \frac{888829145}{169869312}\Lambda^2 + \frac{515947105}{13524931807}\Lambda + \frac{301989888}{97844723712}$
4	—	—	—	$-\frac{5}{256}\Lambda - \frac{107}{6144}$	0	$-\frac{475}{1536}\Lambda^2 - \frac{323095}{884736}\Lambda - \frac{2199527}{21233664}$	0	$-\frac{15815}{71128549}\Lambda^3 - \frac{6138925}{12275264429}\Lambda^2 - \frac{113246208}{12275264429}\Lambda - \frac{122305904640}{12275264429}$	0
5	—	—	—	—	$\frac{25}{768}\Lambda^2 + \frac{515}{13524}\Lambda + \frac{1377}{1327104}$	0	$\frac{25}{384}\Lambda^3 + \frac{163145}{1327104}\Lambda^2 + \frac{62041}{133449991}\Lambda + \frac{786432}{7644119040}$	0	$\frac{20225}{260962627}\Lambda^4 + \frac{81963095}{1090831845}\Lambda^3 + \frac{98304}{1090831845}\Lambda^2 + \frac{127401984}{36691771392}\Lambda + \frac{44030125670400}{44030125670400}$
6	—	—	—	—	—	$-\frac{25}{32}\Lambda^2 - \frac{37169}{1769472}\Lambda - \frac{384013}{424673280}$	0	$-\frac{425}{82443283}\Lambda^3 - \frac{5290135}{58448507}\Lambda^2 - \frac{2264924160}{978447237120}\Lambda - \frac{978447237120}{978447237120}$	0
7	—	—	—	—	—	—	$\frac{125}{73728}\Lambda^3 + \frac{20765}{77707}\Lambda^2 + \frac{47185920}{6177187}\Lambda + \frac{20384317440}{20384317440}$	0	$\frac{125}{21576}\Lambda^4 + \frac{515945}{42467328}\Lambda^3 + \frac{1166591837}{62067170651}\Lambda^2 + \frac{101921587200}{12230590464000}\Lambda + \frac{3643667826661}{4109478395904000}$
8	—	—	—	—	—	—	—	$-\frac{25}{1179648}\Lambda^3 - \frac{595}{6291456}\Lambda^2 - \frac{619081}{679824480}\Lambda - \frac{28211731}{1141521776640}$	0
9	—	—	—	—	—	—	—	—	$\frac{125}{235296}\Lambda^4 + \frac{41825}{3397386321}\Lambda^3 + \frac{1276387}{692812541}\Lambda^2 + \frac{12230590464}{17978967982080}\Lambda + \frac{18307106611}{3451961852559360}$

C Hypergeometrische Funktion und Bessel-Funktion

Um die Gültigkeit von (1.197) zu zeigen, wird hier die allgemeinere Identität

$$\frac{3}{40}\zeta {}_2F_3\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}; 3, 3, \frac{7}{2}; -\zeta\right) - \frac{1}{2} {}_2F_3\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 2, \frac{5}{2}; -\zeta\right) = \frac{d}{d\zeta} \left[J_0\left(\sqrt{\zeta}\right)^2 \right] \quad (C.1)$$

für ein beliebiges komplexes Argument ζ gezeigt. An der Stelle $\zeta = j_{01}^2$ verschwindet $\frac{d}{d\zeta} [J_0(\sqrt{\zeta})^2]$ und es folgt (1.197).

Mit den Differentiationseigenschaften der hypergeometrischen Funktionen, siehe 7.2.3.47 in [75], erhält man

$$\begin{aligned} \frac{3}{40} {}_2F_3\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}; 3, 3, \frac{7}{2}; -\zeta\right) \zeta - \frac{1}{2} {}_2F_3\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 2, \frac{5}{2}; -\zeta\right) = \\ \frac{d}{d\zeta} \left[{}_2F_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1, \frac{3}{2}; -\zeta\right) - \frac{\zeta}{3} {}_2F_3\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 2, \frac{5}{2}; -\zeta\right) \right]. \end{aligned} \quad (C.2)$$

Mit der Integralidentität 7.2.3.11 folgt für das Glied, welches differenziert wird:

$$\begin{aligned} {}_2F_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1, \frac{3}{2}; -\zeta\right) - \frac{\zeta}{3} {}_2F_3\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 2, \frac{5}{2}; -\zeta\right) = \\ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{J_0(2\sqrt{t_1 t_2 \zeta})}{2\sqrt{t_1 t_2 (1-t_1)}} - \frac{\zeta J_1(2\sqrt{t_1 t_2 \zeta})}{2\sqrt{\zeta (1-t_1)}} dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (C.3)$$

wobei die Gleichung (siehe 7.13.1.1 in [75])

$${}_0F_1(b, -\zeta) = \Gamma(b) \zeta^{(1-b)/2} J_{b-1}(2\sqrt{\zeta}) \quad (C.4)$$

genutzt wurde. Das Doppelintegral ergibt

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{J_0(2\sqrt{t_1 t_2 \zeta})}{2\sqrt{t_1 t_2 (1-t_1)}} - \frac{\zeta J_1(2\sqrt{t_1 t_2 \zeta})}{2\sqrt{\zeta (1-t_1)}} dt_1 dt_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{J_0(2\sqrt{t_1 \zeta})}{t_1 (1-t_1)} dt_1 = J_0\left(\sqrt{\zeta}\right)^2, \quad (C.5)$$

womit (C.1) bewiesen ist.

D Lane-Emden-Gleichung für statische Kugeln

Hier soll gezeigt werden, dass die Behandlung polytroper, statischer Kugeln auf die Lane-Emden-Gleichung führt. In diesem Fall lautet die Euler-Gleichung (1.8), mit x als Radialkoordinate, einfach

$$\frac{dp}{dx} = -\mu \frac{dU}{dx}. \quad (\text{D.1})$$

Führt man die Druckfunktion mittels $dh = dp/\mu$ ein, siehe (1.11), und integriert die Gleichung, so erhält man

$$h - h_z = -(U - U_z), \quad (\text{D.2})$$

wobei Größen mit dem Index „z“ jeweils die Werte im Zentrum $x = 0$ angeben. Wendet man den Laplace-Operator auf diese Gleichung an, so ergibt sich für polytrope Materie (1.112) die Gleichung

$$K(n+1) \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} \right) (\mu^{1/n}) = -4\pi G\mu. \quad (\text{D.3})$$

Mit den dimensionslosen Größen¹

$$\bar{x} := \frac{G^{1/2} \mu_z^{(n-1)/(2n)}}{K^{1/2}} x \quad (\text{D.4})$$

und

$$\Theta := (\mu/\mu_z)^{1/n} \quad (\text{D.5})$$

¹Oft wird auch die dimensionslose Koordinate $\xi := \sqrt{\frac{4\pi}{n+1}} \bar{x}$ benutzt. Damit schreibt sich (D.6) als $\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi} \right) \Theta + \Theta^n = 0$.

folgt die Lane-Emden-Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{x}^2} + \frac{2}{\bar{x}} \frac{d}{d\bar{x}} \right) \Theta + \frac{4\pi}{n+1} \Theta^n = 0. \quad (\text{D.6})$$

Diese Gleichung und viele ihrer Anwendungen sind in dem Buch [24] ausführlich diskutiert. Aus der Funktion $\Theta(\bar{x})$ ergibt sich der Verlauf von Druck und Druckfunktion zu

$$p = p_z \Theta^{n+1} \quad (\text{D.7})$$

und

$$h = h_z \Theta = K(n+1) \mu_z^{1/n} \Theta. \quad (\text{D.8})$$

Für spezielle Werte von n sind strenge Lösungen mit den „Anfangswerten“ $\Theta(0) = 1$ und $\frac{d}{d\bar{x}} \Theta|_{\bar{x}=0} = 0$ bekannt:

$$n \rightarrow 0: \quad \Theta(\bar{x}) = 1 - \frac{2\pi}{3} \bar{x}^2, \quad (\text{D.9})$$

$$n = 1: \quad \Theta(\bar{x}) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi}\bar{x})}{\sqrt{2\pi}\bar{x}}, \quad (\text{D.10})$$

$$n = 5: \quad \Theta(\bar{x}) = \left(1 + \frac{2\pi}{9} \bar{x}^2 \right)^{-1/2}. \quad (\text{D.11})$$

Für $n = 5$ liegt die erste positive Nullstelle der Funktion $\Theta(\bar{x})$ bei $\bar{x} \rightarrow \infty$, d.h. der Druck fällt erst im Unendlichen auf null ab. Insbesondere führt eine zu (1.244) analoge Definition für den Kugelfall auf $\kappa = 0$. In diesem Sinne ist die gesamte Masse im Zentrum konzentriert. Im Anhang E wird gezeigt, dass die Ausdrücke $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{k+1} \frac{d^k h}{dx^k}$ für polytrope Kugeln mit $n = 5$ dieselben Werte ergeben wie die entsprechenden Ausdrücke des Roche-Modells, siehe (E.17).

E Roche-Modell für sphäroidale Konfigurationen

Wie bereits erwähnt, ist das Roche-Modell mit dem Potential einer Punktmasse in [76, 38, 86, 77] diskutiert worden und liefert eine eindeutige Oberflächenfunktion für Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze. Um diese Funktion zu bestimmen, wird hier der Darstellung aus [56] gefolgt. Man beginnt damit, die Gleichung (1.14) mit dem Potential für eine Punktmasse

$$U = -\frac{GM}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} \quad (\text{E.1})$$

aufzuschreiben. Man erhält

$$V_0 + \frac{GM}{\sqrt{\varrho^2 + z_{\text{Ob}}(\varrho)^2}} + \frac{1}{2}\Omega^2\varrho^2 = 0. \quad (\text{E.2})$$

Betrachtet man den Punkt $\varrho = 0$, so kann man die Konstante V_0 mit dem Polarradius z_p verknüpfen:

$$V_0 = -\frac{GM}{z_p}. \quad (\text{E.3})$$

Für Konfigurationen an der Massenabwurfsgrenze gilt die Gleichung

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=\varrho_a, z=0} = \varrho_a \Omega^2, \quad (\text{E.4})$$

wobei ϱ_a der Äquatorradius ist. Dies führt auf die Gleichung

$$GM = \varrho_a^3 \Omega^2, \quad (\text{E.5})$$

und die Oberflächenbedingung (E.2) wird zu

$$z_p \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} + \frac{\varrho^2}{2\varrho_a^3} \right) = 1. \quad (\text{E.6})$$

Wertet man diesen Ausdruck am Äquator $z = 0$ aus, ergibt sich das Radienverhältnis für das Roche-Modell an der Massenabwurfsgrenze zu

$$\frac{z_p}{\varrho_a} = \frac{2}{3}. \quad (\text{E.7})$$

Damit kann die Oberflächenfunktion explizit angegeben werden:

$$z_{\text{Ob}} = \frac{\sqrt{4\varrho_a^2 - \varrho^2} (\varrho_a^2 - \varrho^2)}{3\varrho_a^2 - \varrho^2}. \quad (\text{E.8})$$

Es folgt

$$\lim_{z \downarrow 0} \frac{dz_{\text{Ob}}}{d\varrho} = -\sqrt{3}, \quad (\text{E.9})$$

was bedeutet, dass der Winkel an der „Spitze“ der Konfiguration an der Massenabwurfsgrenze 120° groß ist (siehe Abb. 1.19 für $b' \rightarrow 0$).

Im statischen Fall ($\Omega = 0$) ist das Problem kugelsymmetrisch und die Bernoulli-Gleichung (1.12) ergibt für die Druckfunktion

$$h = GM \left(\frac{1}{\mathcal{R}} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right), \quad (\text{E.10})$$

wobei

$$\mathcal{R} := \sqrt{\varrho^2 + z^2} \in (0, \mathcal{R}_0] \quad (\text{E.11})$$

ist. \mathcal{R}_0 ist der Wert an der Oberfläche.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die Werte der Ausdrücke $\mathcal{R}^{k+1} \frac{d^k h}{d\mathcal{R}^k}$ mit jenen der entsprechenden Ausdrücke für polytrope Kugeln mit $n = 5$ übereinstimmen. Für diese gilt (siehe Anhang D)

$$\mu_5 = \mu_z \left(1 + \frac{2\pi}{9} \bar{x}^2 \right)^{-5/2}, \quad \bar{x} \in [0, \infty) \quad (\text{E.12})$$

und

$$h_5 = 6K\mu_5^{1/5}, \quad (\text{E.13})$$

wobei

$$\bar{x} = \frac{G^{1/2}\mu_z^{2/5}}{K^{1/2}}x \quad (\text{E.14})$$

die dimensionslose radiale Koordinate und x die dimensionsbehaftete ist. Die Oberfläche liegt im Unendlichen, und der reguläre Teil des \mathcal{R} -Intervalls, $\mathcal{R} > 0$, gehört zu unendlichen Werten von x . Um (E.13) mit (E.10) vergleichen zu können, entwickelt man (E.13) für $x \rightarrow \infty$:

$$h_5 = \frac{9\sqrt{2}K^{3/2}}{\sqrt{\pi}G^{1/2}\mu_z^{1/5}}\frac{1}{x} + O(\bar{x}^{-3}). \quad (\text{E.15})$$

Die Masse der Konfiguration des vollen Problems ist

$$GM = 4\pi G \int_0^\infty \mu_5 x^2 dx = \frac{9\sqrt{2}K^{3/2}}{\sqrt{\pi}G^{1/2}\mu_z^{1/5}}, \quad (\text{E.16})$$

und folglich entspricht der führende Term von (E.15) gerade (E.10). Für alle $k \in \mathbb{N}^+$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{k+1} \frac{d^k h_5}{dx^k} = \mathcal{R}^{k+1} \frac{d^k h}{d\mathcal{R}^k}. \quad (\text{E.17})$$

F Lokal nichtrotierender Beobachter

Bekanntlich bleibt entlang von Geodäten das Skalarprodukt der Vierergeschwindigkeit mit einem Killing-Vektor erhalten. Insbesondere ist für einen frei fallenden Beobachter mit Vierergeschwindigkeit u_B^i in einer axialsymmetrischen, stationären¹ Raumzeit (2.4) die Größe $\eta_i u_B^i$ konstant. Im Newtonschen Grenzfall ist das die z -Komponente des spezifischen Drehimpulses des Beobachters. Für *lokal nichtrotierende Beobachter* (engl. *locally nonrotating observer* oder auch *zero angular momentum observer*), siehe [10, 12], verschwindet diese Erhaltungsgröße:

$$\eta_i u_B^i = 0. \quad (\text{F.1})$$

Für derartige Beobachter mit $u_B^\theta = u_B^z = 0$ ergeben sich die verbleibenden Komponenten der Vierergeschwindigkeit in Lewis-Papapetrou-Koordinaten zu:

$$u_B^i = (0, 0, \omega e^{-\nu}, e^{-\nu}). \quad (\text{F.2})$$

Vom Unendlichen aus betrachtet rotiert der lokal nichtrotierende Beobachter also mit Winkelgeschwindigkeit $\Omega_B = \omega \equiv -g_{\varphi t}/g_{\varphi\varphi}$. Gerade um dieser Eigenschaft gerecht zu werden, spricht man vom *lokal nichtrotierenden* Beobachter.

Die Viererimpulsdichte der Flüssigkeit lautet $\mu_B u^i$ (μ_B ist die baryonische Massendichte). Daraus lässt sich die Energiedichte der Flüssigkeit, betrachtet vom lokal nichtrotierenden Beobachter aus, berechnen:

$$e = -\mu_B u^i u_{Bi}, \quad (\text{F.3})$$

¹Natürlich ist bei allen axialsymmetrischen Raumzeiten $\eta_i u_B^i$ eine Erhaltungsgröße. Dies gilt insbesondere auch für den nichtstationären Fall, hier ist aber nur der stationäre von Interesse.

siehe etwa [34]. Für die zugehörige (Dreier-)Geschwindigkeit der Flüssigkeit v gilt

$$e = \frac{\mu_B c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (\text{F.4})$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt in Übereinstimmung mit (2.14)

$$v = \varrho(\Omega - \omega)e^{\lambda - \nu}. \quad (\text{F.5})$$

Darüber hinaus gilt die invariante Beziehung

$$\frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{\eta_i u^i}{\sqrt{\eta_k \eta^k}}, \quad (\text{F.6})$$

welche leicht mithilfe der obigen Formeln überprüft werden kann.

G Bindungsenergie

Im Folgenden wird eine Formel für die Bindungsenergie eines starr rotierenden, stationären, axialsymmetrischen Körpers in erster post-Newtonscher Ordnung hergeleitet. Dazu werden alle auftretenden Größen in Potenzen von

$$\bar{\varepsilon} := \frac{\sqrt{G\mu_{\text{ch}}}L_{\text{ch}}}{c} \quad (\text{G.1})$$

entwickelt, wobei μ_{ch} eine charakteristische Massendichte und L_{ch} eine charakteristische Länge des Körpers ist:

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\nu}_{2i} \bar{\varepsilon}^{2i}, & \lambda &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}_{2i} \bar{\varepsilon}^{2i}, & \psi &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}_{2i} \bar{\varepsilon}^{2i}, & \frac{\omega}{\Omega} &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\omega}_{2i} \bar{\varepsilon}^{2i}, \\ \frac{L_{\text{ch}}\Omega}{c} &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Omega}_{2i-1} \bar{\varepsilon}^{2i-1}, & \frac{v}{c} &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{v}_{2i-1} \bar{\varepsilon}^{2i-1}, & \frac{p}{\mu_{\text{ch}}c^2} &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{p}_{2i} \bar{\varepsilon}^{2i}, \\ \frac{\mu}{\mu_{\text{ch}}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\mu}_{2i} \bar{\varepsilon}^{2i}, & \frac{\mu_{\text{B}}}{\mu_{\text{ch}}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\mu}_{\text{B}2i} \bar{\varepsilon}^{2i}, & \frac{u}{\mu_{\text{ch}}c^2} &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{u}_{2i} \bar{\varepsilon}^{2i}. \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der post-Newtonschen Entwicklung für homogene Ringe aus dem Kapitel 2.4.1. Wie dort beschrieben, stellen bei jenen Größen, die es auch in der Newtonschen Theorie gibt, die führenden Glieder der Reihe gerade die entsprechenden Newtonschen Größen (Index „N“) dar. So gilt beispielsweise $U = c^2 \bar{\varepsilon}^2 \bar{\nu}_2$ und $v_{\text{N}} = c \bar{\varepsilon} \bar{v}_1$.

Zur Massendichte μ trägt neben der baryonischen Massendichte μ_{B} auch die Dichte der inneren Energie u , siehe (2.18), bei:

$$\mu = \mu_{\text{B}} + \frac{u}{c^2}. \quad (\text{G.3})$$

Die Entwicklung nach $\bar{\varepsilon}$ ergibt

$$\bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_{\text{B}0} \quad \text{und} \quad \bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_{\text{B}2} + \bar{u}_2. \quad (\text{G.4})$$

In Newtonscher Ordnung unterscheiden sich die beiden Massendichten μ und μ_{B} nicht.

Völlig analog zu (2.62) ergeben die post-Newtonschen Feldgleichungen

$$\bar{\lambda}_2 = \bar{\psi}_2 = -\bar{\nu}_2. \quad (\text{G.5})$$

Die Formel (2.42) für die baryonische Masse ergibt damit

$$M_B = \underbrace{2\pi\mu_{\text{ch}} \iint \bar{\mu}_0 \varrho \, d\varrho \, dz}_{=M_N^*} + \underbrace{2\pi\mu_{\text{ch}}\bar{\varepsilon}^2 \iint \frac{\bar{\mu}_0 \bar{v}_1^2}{2} \varrho \, d\varrho \, dz}_{=T^*/c^2} - \underbrace{2\pi\mu_{\text{ch}}\bar{\varepsilon}^2 \iint 3\bar{\mu}_0 \bar{\nu}_2 \varrho \, d\varrho \, dz}_{=6W^*/c^2} + M_N O(\bar{\varepsilon}^4), \quad (\text{G.6})$$

und die post-Newtonsche Entwicklung der Gravitationsmasse (2.40) lautet

$$M = \underbrace{2\pi\mu_{\text{ch}}\bar{\varepsilon}^2 \iint 2\bar{\mu}_0 \bar{v}_1^2 \varrho \, d\varrho \, dz}_{=4T^*/c^2} + \underbrace{2\pi\mu_{\text{ch}} \iint \bar{\mu}_0 \varrho \, d\varrho \, dz}_{=M_N^*} + \underbrace{2\pi\mu_{\text{ch}}\bar{\varepsilon}^2 \iint \bar{u}_2 \varrho \, d\varrho \, dz}_{=\mathcal{U}^*/c^2} + \underbrace{2\pi\mu_{\text{ch}}\bar{\varepsilon}^2 \iint 3\bar{p}_2 \varrho \, d\varrho \, dz}_{=3P^*/c^2} - \underbrace{2\pi\mu_{\text{ch}}\bar{\varepsilon}^2 \iint 2\bar{\mu}_0 \bar{\nu}_2 \varrho \, d\varrho \, dz}_{=4W^*/c^2} + M_N O(\bar{\varepsilon}^4). \quad (\text{G.7})$$

Fällt die Oberfläche des relativistischen Körpers mit jener des Newtonschen Vergleichskörpers zusammen, dann ist M_N^* genau dessen (Newtonsche) Masse M_N , siehe (1.41). Wegen der unterschiedlichen Integrationsgrenzen unterscheiden sich die beiden Größen im allgemeinen Fall, wenngleich sie auch dann in führender Ordnung übereinstimmen:

$$M_N^* = M_N[1 + O(\bar{\varepsilon}^2)]. \quad (\text{G.8})$$

Dasselbe gilt in analoger Weise für die Größen T^* , W^* , \mathcal{U}^* und P^* , die sich in führender Ordnung mit der kinetischen, potentiellen und inneren Energie sowie dem Druckintegral decken, siehe (1.45), (1.44), (2.19) und (1.43). Nur die führenden Terme dieser Größen tragen in der betrachteten Ordnung zu den Massen M und M_B bei. Dies gilt jedoch nicht für die Größe M_N^* . Die Konsequenz: Selbst die erste post-Newtonsche Korrektur von Gravitationsmasse und baryonischer Masse zur Newtonschen Masse M_N ist im Allgemeinen nicht aus den Newtonschen Größen berechenbar. Für die Differenz $M_B - M$ spielt dies jedoch keine Rolle, da sich dort M_N^* heraushebt. In erster post-Newtonscher

Näherung lautet die Bindungsenergie (2.43):

$$E_{\text{b}}^{1\text{pN}} = -(3T + \mathcal{U} + 3P + 2W). \quad (\text{G.9})$$

Mithilfe der Virialidentität (1.47) folgt

$$\boxed{E_{\text{b}}^{1\text{pN}} = -(T + \mathcal{U} + W).} \quad (\text{G.10})$$

Diese Formel lässt sich sehr anschaulich interpretieren: Neben der baryonischen Masse wirken auch alle anderen Energieformen (kinetische, potentielle und innere Energie) gravitativ. Die Größe $E := T + \mathcal{U} + W$ ist die Gesamtenergie der Newtonschen Konfiguration, und in diesem Sinne kann $E_{\text{b}}^{1\text{pN}} = -E$ auch als Newtonsche Größe aufgefasst werden, wenngleich es in der Newtonschen Theorie keinen (gravitativen) Massendefekt gibt. Man beachte in diesem Zusammenhang den Faktor $c^2 \propto \bar{\varepsilon}^{-2}$ in der Formel (2.43).

Dieses Ergebnis stimmt mit der Gleichung (103) aus [35] überein. Dort ist \mathcal{U} als (Newtonsche) *Kompressionsenergie*

$$\mathcal{U} = \int \mu_{\text{N}} \Pi \, \text{d}^3x \quad (\text{G.11})$$

mit

$$\text{d}\Pi = -p_{\text{N}} \, \text{d}\frac{1}{\mu_{\text{N}}} \quad \text{mit} \quad \Pi = 0 \quad \text{für} \quad p_{\text{N}} = 0 \quad (\text{G.12})$$

angegeben. Um zu sehen, dass für die innere Energiedichte in Newtonscher Ordnung

$$u_{\text{N}} = \mu_{\text{N}} \Pi \quad (\text{G.13})$$

gilt, betrachtet man die führende Ordnung von (2.17):

$$-p_{\text{N}} \, \text{d}\frac{1}{\mu_{\text{N}}} = \text{d}\frac{u_{\text{N}}}{\mu_{\text{N}}}. \quad (\text{G.14})$$

Damit wird (G.12) zu

$$\text{d}\Pi = \text{d}\frac{u_{\text{N}}}{\mu_{\text{N}}}, \quad (\text{G.15})$$

was integriert (G.13) ergibt und die Äquivalenz der beiden Ausdrücke (G.11) und (2.19) zeigt.

Das wird am Beispiel der Polytropengleichung (1.111), also

$$p_N = K\mu_N^{1+1/n}, \quad (\text{G.16})$$

explizit demonstriert. Daraus folgt mit (G.12)

$$d\Pi = p_N \frac{d\mu_N}{\mu_N^2} = K\mu_N^{1/n-1} d\mu_N \quad \text{und} \quad \Pi = nK\mu_N^{1/n}. \quad (\text{G.17})$$

Die Newtonsche Dichte der inneren Energie für polytrope Materie ist also

$$u_N = np_N, \quad (\text{G.18})$$

in Konsistenz mit Gleichung (2.25).¹ Damit folgt

$$\mathcal{U} = nP. \quad (\text{G.19})$$

Mithilfe dieser Formel soll nun die Bindungsenergie von polytropen, statischen (kugelsymmetrischen) Konfigurationen bestimmt werden. Die kinetische Energie verschwindet:

$$T = 0, \quad (\text{G.20})$$

und die Virialidentität (1.47) ergibt

$$W = -3P. \quad (\text{G.21})$$

Damit folgt für die Bindungsenergie in erster post-Newtonscher Ordnung (G.10)

$$E_b^{1\text{pN}} = (3 - n)P. \quad (\text{G.22})$$

Dieses Ergebnis passt sehr gut zu den numerischen Resultaten aus [83]. Dort wird gezeigt (siehe Abb. 2 ebd.), dass für relativistische, polytrope Kugeln mit $n \geq 3$ die Bindungsenergie stets negativ² ist, siehe auch Fußnote 29. Eine Konsequenz: Polytrope Gaskugeln mit $n \geq 3$ können nicht im stabilen Gleichgewicht sein.

¹Verallgemeinert man diese Rechnung auf die relativistische Polytropengleichung $p = K\mu_B^{1+1/n}$, indem man den Index „N“ weglässt und für die Massendichte stets die *baryonische* Massendichte setzt, so zeigt man $u = np$, siehe (2.25). (Für die Zustandsgleichung $p = K\mu^{1+1/n}$ gilt *nicht* $u = np$, sondern nur (G.18). Der Grund: In der Gleichung (2.17) steht μ_B und nicht μ .)

²Die Gleichung (G.22) ergibt $E_b^{1\text{pN}} = 0$ für $n = 3$, was natürlich nicht im Widerspruch zum numerischen Resultat $E_b < 0$ für $n = 3$ steht.

Für homogene Konfigurationen (2.23) ist die Bindungsenergie in erster post-Newtonscher Ordnung immer positiv. Dafür gilt nämlich

$$\mathcal{U} = 0. \tag{G.23}$$

Aus der Virialidentität (1.47) folgt wegen $P > 0$ die Ungleichung $2T + W < 0$. Weil $T \geq 0$ gilt, folgt daraus

$$T + W < 0, \tag{G.24}$$

und zusammen mit (G.23) schließlich das angekündigte Resultat

$$E_{\text{b}}^{\text{1pN}} > 0. \tag{G.25}$$

H Toroidalkoordinaten

Zur Behandlung von Ringen eignen sich *Toroidalkoordinaten* (η, ξ, φ) mit den Wertebereichen $0 \leq \eta < 2\pi$ und $\xi \geq 0$ besonders gut, vor allem weil die verallgemeinerte Laplace-Gleichung in diesen Koordinaten mithilfe eines Separationsansatzes gelöst werden kann, siehe Anhang I. Der Zusammenhang mit den Zylinderkoordinaten (ϱ, z, φ) ist durch

$$\boxed{\varrho = \frac{b \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad \text{und} \quad z = \frac{b \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}} \quad (\text{H.1})$$

gegeben. In den Querschnittsebenen $\varphi = \text{const}$ reduzieren sich die Koordinaten (η, ξ) auf sogenannte *bipolare Koordinaten*.¹ Sie sind in Abb. H.1 dargestellt. Dabei ist b eine positive Konstante, die angibt, an welcher Stelle die Koordinatensingularität $\xi \rightarrow \infty$ liegt. Bei der Diskussion von (dünnen) Ringen wählt man die Stelle am zweckmäßigsten so, dass sie mit $r = 0$, also dem Schwerpunkt des Querschnitts, siehe (2.8), zusammenfällt.² Im Folgenden werden einige Eigenschaften der Toroidalkoordinaten angegeben, die sich leicht nachrechnen lassen, siehe auch [58]. Das (dreidimensionale) Linienelement der Koordinaten lautet

$$d\vec{x}^2 = h_\eta^2 d\eta^2 + h_\xi^2 d\xi^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2, \quad (\text{H.2})$$

mit

$$h_\eta = h_\xi = \frac{b}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad \text{und} \quad h_\varphi = \frac{b \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}. \quad (\text{H.3})$$

Die Umkehrtransformation zu (H.1) ist

$$\xi = \ln \frac{d_+}{d_-} \quad \text{und} \quad \cos \eta = \frac{d_+^2 + d_-^2 - 4b^2}{2d_+ d_-}, \quad (\text{H.4})$$

¹Unter Berücksichtigung von $\varrho \geq 0$ sind die Flächen $\varphi = \text{const}$ Halbebenen. Dies ergibt die Einschränkung $\xi \geq 0$ und erklärt, warum es hier trotz des Zusammenhangs mit den *bipolaren* Koordinaten nur den *einen* Pol $\xi \rightarrow \infty$ gibt. (Der zweite Pol läge bei $\varrho = -b, z = 0$ bzw. $\xi \rightarrow -\infty$.)

²Da man hier stets diese Wahl trifft, wurde die Konstante mit demselben Symbol, nämlich b , bezeichnet.

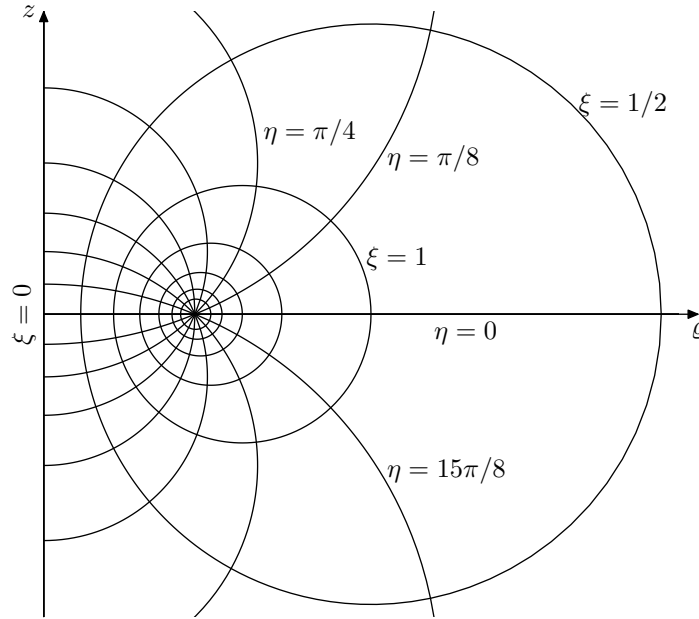


Abbildung H.1: Darstellung der Toroidalkoordinaten (η, ξ) für konstantes φ . Eingezeichnet sind, von außen beginnend, die Linien $\xi = 0$ (z -Achse), $\xi = 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2$ und 3 . Der Pol liegt bei $\xi \rightarrow \infty$ bzw. ($\varrho = b, z = 0$). Außerdem sind, beginnend am Äquator (mit $\varrho > b$), gegen den Uhrzeigersinn die „radialen“ Linien $\eta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2, 5\pi/8, 3\pi/4, 7\pi/8, \pi$ (Äquator mit $\varrho < b$), $9\pi/8, 5\pi/4, 11\pi/8, 3\pi/2, 13\pi/8, 7\pi/4$ und $15\pi/8$ dargestellt.

wobei die Größen d_+ und d_- durch die positiv gezogenen Wurzeln

$$d_{\pm} := \sqrt{(b \pm \varrho)^2 + z^2} \quad (\text{H.5})$$

definiert sind. Insbesondere gilt

$$\cosh \xi - \cos \eta = \frac{2b^2}{d_+ d_-}. \quad (\text{H.6})$$

Diese Kombination ist von Bedeutung, da sie im Separationsansatz (I.2) vorkommt. Zu den Koordinaten r und χ , siehe (1.1) und Abb. 1.1, besteht der Zusammenhang

$$d_- = r \quad \text{und} \quad d_+^2 = d_-^2 + 4b\rho = r^2 + 4b^2 - 4br \cos \chi. \quad (\text{H.7})$$

Auf der Achse $\varrho = 0$ ist auch $\xi = 0$. Dort gilt

$$\varrho = 0: \quad 1 - \cos \eta = \frac{b \sin \eta}{z} = 2 \frac{b^2}{r_A^2} \quad \text{und} \quad d_+ = d_- = r_A. \quad (\text{H.8})$$

Hier ist mit r_A wieder die Koordinate r auf der Achse gemeint. Der Winkel $\chi_A \equiv \chi$ ist durch die Gleichung (1.28) festgelegt. Weiterhin gilt

$$\varrho^2 + z^2 = b^2 \frac{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}{(\cosh \xi - \cos \eta)^2} = b^2 \frac{\cosh \xi + \cos \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}. \quad (\text{H.9})$$

Daraus folgt $\varrho^2 + z^2 + b^2 = 2b\varrho \coth \xi$ und insbesondere

$$(\varrho - b \coth \xi)^2 + z^2 = b^2 \underbrace{(\coth^2 \xi - 1)}_{=\sinh^{-2} \xi}. \quad (\text{H.10})$$

Die Koordinatenlinien mit konstantem ξ sind also im Querschnitt betrachtet Kreise mit Radius $b/\sinh \xi$ und Mittelpunkt $(\varrho = b \coth \xi, z = 0)$. Im Grenzfall $\xi \rightarrow 0$ wird der Kreis zur z -Achse, und für $\xi \rightarrow \infty$ schrumpft der Kreis auf den Punkt $(\varrho = b, z = 0)$. Aus (H.9) folgt außerdem $\varrho^2 + z^2 - b^2 = 2bz \cot \eta$, also

$$\varrho^2 + (z - b \cot \eta)^2 = b^2 \underbrace{(1 + \cot^2 \eta)}_{=\sin^{-2} \eta}. \quad (\text{H.11})$$

Die Koordinatenlinien mit konstantem η sind also Kreisbögen. Diese haben den Radius $b/|\sin \eta|$ und den Mittelpunkt $(\varrho = 0, z = b \cot \eta)$. Die Äquatorsymmetrie einer Funktion $f(\varrho, z) = f(\varrho, -z)$ bedeutet in Toroidalkoordinaten

$$f(\eta, \xi) = f(2\pi - \eta, \xi). \quad (\text{H.12})$$

I Verallgemeinerte Laplace-Gleichung in Toroidalkoordinaten

Der verallgemeinerte Laplace-Operator (2.33), angewandt auf axialsymmetrische Funktionen, lautet in Toroidalkoordinaten

$$\Delta_m f(\eta, \xi) = \frac{(\cosh \xi - \cos \eta)^2}{b^2} \left[f_{,\eta\eta} + f_{,\xi\xi} - \frac{m+1}{\cosh \xi - \cos \eta} \left(\sin \eta f_{,\eta} + \frac{\cosh \xi \cos \eta - 1}{\sinh \xi} f_{,\xi} \right) \right]. \quad (\text{I.1})$$

Mit dem Separationsansatz

$$f(\eta, \xi) = (\cosh \xi - \cos \eta)^{(m+1)/2} H(\eta) \Xi(\xi) \quad (\text{I.2})$$

wird $\Delta_m f(\eta, \xi) = 0$ nach Kürzen von $b^{-2}(\cosh \xi - \cos \eta)^{(m+5)/2} H(\eta) \Xi(\xi)$ zu

$$\frac{\Xi''(\xi)}{\Xi(\xi)} + (m+1) \coth \xi \frac{\Xi'(\xi)}{\Xi(\xi)} + \frac{H''(\eta)}{H(\eta)} + \frac{(m+1)^2}{4} = 0, \quad (\text{I.3})$$

wobei der Strich ' die Ableitung nach dem jeweiligen Argument bedeutet. Der η -Anteil kann sofort gelöst werden:

$$\frac{H''(\eta)}{H(\eta)} = -n^2 \quad \Rightarrow \quad H(\eta) \equiv H_n(\eta) = \begin{cases} A_0 + B_0 \eta & \text{für } n = 0 \\ A_n \cos(n\eta) + B_n \sin(n\eta) & \text{sonst} \end{cases}. \quad (\text{I.4})$$

Die Stetigkeitsbedingung $H(0) = H(2\pi)$ ergibt $B_0 = 0$ und $n \in \mathbb{Z}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Wahl $n \in \mathbb{N}$ treffen. Um Äquatorsymmetrie (H.12) zu gewährleisten, müssen sämtliche $B_n = 0$ gesetzt werden. Die Differentialgleichung für

$\Xi(\xi)$ ergibt sich mit (I.4) zu

$$\Xi''(\xi) + (m+1) \coth \xi \Xi'(\xi) + \left[\frac{(m+1)^2}{4} - n^2 \right] \Xi(\xi) = 0. \quad (\text{I.5})$$

Mit den Substitutionen

$$\bar{\Xi} := \Xi \sinh^{m/2} \xi \quad \text{und} \quad \bar{\xi} := \cosh \xi \quad (\text{I.6})$$

führt dies auf die *zugeordnete Legendre-Differentialgleichung*

$$(1 - \bar{\xi}^2) \bar{\Xi}''(\bar{\xi}) - 2\bar{\xi} \bar{\Xi}'(\bar{\xi}) + \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{(m/2)^2}{1 - \bar{\xi}^2} \right] \bar{\Xi}(\bar{\xi}) = 0. \quad (\text{I.7})$$

Die zugeordneten Legendre-Funktionen erster und zweiter Gattung

$$\bar{\Xi}_1(\bar{\xi}) = P_{n-1/2}^{m/2}(\bar{\xi}) \quad \text{und} \quad \bar{\Xi}_2(\bar{\xi}) = Q_{n-1/2}^{m/2}(\bar{\xi}). \quad (\text{I.8})$$

sind zwei linear unabhängige Lösungen. Die Lösungen der Differentialgleichung (I.5) lauten also

$$\Xi(\xi) \equiv \Xi_{mn}(\xi) = \frac{C_{mn} P_{n-1/2}^{m/2}(\cosh \xi) + D_{mn} Q_{n-1/2}^{m/2}(\cosh \xi)}{\sinh^{m/2} \xi}, \quad (\text{I.9})$$

wobei C_{mn} und D_{mn} Konstanten sind. Diese Funktionen stellen eine Verallgemeinerung der in der englischsprachigen Literatur (siehe etwa [59]) als *toroidal harmonics* bekannten Funktionen dar, welche bei der Behandlung des gewöhnlichen Laplace-Operators auftreten. Damit die Lösungen auf der Achse $\xi = 0$ regulär sind, müssen für $m = 0$ und $m = 2$ die Konstanten $D_{mn} = 0$ gesetzt werden. Also sind

$$f_{0n}(\eta, \xi) = (\cosh \xi - \cos \eta)^{1/2} \cos(n\eta) P_{n-1/2}(\cosh \xi) \quad (\text{I.10})$$

und

$$f_{2n}(\eta, \xi) = \frac{(\cosh \xi - \cos \eta)^{3/2}}{\sinh \xi} \cos(n\eta) P_{n-1/2}^1(\cosh \xi) \quad (\text{I.11})$$

reguläre, axial- und äquatorsymmetrische Lösungen der Laplace-Gleichung ($m = 0$) bzw. der verallgemeinerten Laplace-Gleichung mit $m = 2$. Die Funktion f_{00} stimmt bis auf einen konstanten Faktor mit der Funktion I_1 aus (1.34) überein. Um dies zu zeigen, kann man sich auf die Achsenwerte beschränken, da beide Funktionen axialsymmetri-

sche Lösungen der Laplace-Gleichung sind. Es gilt

$$f_{00}(\eta, \xi = 0) = \sqrt{1 - \cos \eta} \quad (\text{I.12})$$

und

$$I_1(\varrho = 0, z) = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 + z^2}} = \frac{\pi}{r_A} = \frac{\pi}{\sqrt{2}b} \sqrt{1 - \cos \eta}, \quad (\text{I.13})$$

wobei (H.8) benutzt wurde. Damit ist

$$I_1(r, \chi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}b} f_{00}(\eta, \xi) \quad (\text{I.14})$$

bewiesen.¹ In Analogie zu den I_l aus (1.32) und (1.35) definiert man²

$$K_1(r, \chi) := \frac{\pi}{\sqrt{2}b^3} f_{20}(\eta, \xi) \quad (\text{I.15})$$

und für $l > 1$

$$K_l(r, \chi) := \left(-\frac{1}{b} \frac{d}{db} \right)^{l-1} K_1(r, \chi). \quad (\text{I.16})$$

Insbesondere benötigt man von den Funktionen K_l die Reihenentwicklungen für $r/b \rightarrow 0$ bzw. $\xi \rightarrow \infty$. Bei deren Berechnung ist es nützlich, die Koordinate β , definiert durch

$$\beta := \sqrt{\frac{2}{1 + \cosh \xi}} \equiv \frac{1}{\cosh \frac{\xi}{2}} \quad \text{bzw.} \quad \cosh \xi = \frac{2}{\beta^2} - 1, \quad (\text{I.17})$$

zu verwenden. Mit den Koordinaten ϱ, z bzw. r, χ besteht der Zusammenhang

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{d_+}{2d_-} + \frac{d_-}{2d_+}}} = \frac{2\sqrt{d_+d_-}}{d_+ + d_-}, \quad (\text{I.18})$$

siehe (H.5). Damit gilt (siehe 8.13.2 in [1])

$$P_{-1/2}(\cosh \xi) = \frac{2\mathcal{K}(\tanh \frac{\xi}{2})}{\pi \cosh \frac{\xi}{2}} = \frac{2\beta}{\pi} \mathcal{K}(\sqrt{1 - \beta^2}) =: B(\beta). \quad (\text{I.19})$$

¹Um Missverständnissen vorzubeugen, sei angemerkt, dass sich I_2 nicht nur um einen konstanten Faktor von f_{01} unterscheidet. Die Sätze f_{0n} und I_l weichen wesentlich voneinander ab.

²Andere Potenzen von b wären ebenso möglich. Bei der getroffenen Wahl haben die K_l auf der Achse eine besonders einfache Form, siehe (I.25).

Die Entwicklung des vollständigen elliptischen Integrals \mathcal{K} für $\beta \ll 1$ (siehe etwa 17.3.21 mit 17.3.5 und 17.3.11 in [1]) ergibt für $B(\beta)$ die Reihenentwicklung

$$B(\beta) = \frac{2}{\pi}(\ln 4 - \ln \beta)\beta + \frac{1}{2\pi}(\ln 4 - 1 - \ln \beta)\beta^3 + o(\beta^3). \quad (\text{I.20})$$

Mit der Formel (siehe 8.6.6 in [1])

$$\frac{P_{-1/2}^1(\zeta)}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{dP_{-1/2}(\zeta)}{d\zeta} \quad (\text{I.21})$$

gelangt man zu

$$\frac{P_{-1/2}^1(\cosh \xi)}{\sinh \xi} = -\frac{\beta^3}{4} \frac{dB(\beta)}{d\beta}. \quad (\text{I.22})$$

Zusammen mit (I.18), (I.20), (H.6) und (H.7) hat man damit die Reihendarstellung von f_{20} bzw. K_1 für $r/b \rightarrow 0$ in der Hand. Die Gleichung (I.16) liefert dann die Reihendarstellungen für K_l mit $l > 1$.

Die Achsenwerte des Potentials f_{20} ergeben sich aus dem Grenzübergang $\xi \rightarrow 0$, bzw. mithilfe von (I.22) im Limes $\beta \rightarrow 1$, zu

$$f_{20}(\eta, \xi = 0) = -\frac{(1 - \cos \eta)^{3/2}}{8}. \quad (\text{I.23})$$

Das bedeutet

$$K_1(r_A) = -\frac{\pi}{4r_A^3} = -\frac{\pi}{4(b^2 + \varrho^2)^{3/2}}, \quad (\text{I.24})$$

und mit (I.16) folgt

$$K_l(r_A) = -\frac{\pi(2l-1)!!}{4r_A^{2l+1}}. \quad (\text{I.25})$$

Diese Gleichung besitzt große Ähnlichkeit zu (1.37).

J Physikalische Größen in post-Newtonscher Näherung

Hier werden Formeln für verschiedene physikalische Größen in erster post-Newtonscher Näherung angegeben.

- Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{c\tilde{\Omega}}{b} = \frac{c}{b}[\varepsilon\tilde{\Omega}_1 + \varepsilon^3\tilde{\Omega}_3 + O(\varepsilon^5)] = \Omega_N + \frac{c}{b}\varepsilon^3\tilde{\Omega}_3 + \Omega_N O(\varepsilon^4) \quad (\text{J.1})$$

- Drehimpuls (2.39)

$$\begin{aligned} J &= \frac{2\pi\mu c}{b} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{ob}}(\chi)} \frac{1+\tilde{p}}{1-\tilde{v}^2} \tilde{\Omega}(1-\tilde{\omega}^i) e^{2\psi^i+3\lambda^i-\nu^i} (b-r\cos\chi)^3 r \, dr \, d\chi \\ &= \frac{2\pi\mu c}{b} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\chi)+r_2(\chi)\varepsilon^2+O(\varepsilon^4)} \left[\tilde{\Omega}_1\varepsilon + k_3\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5) \right] (b-r\cos\chi)^3 r \, dr \, d\chi \\ &= \frac{2\pi\mu c}{b} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\chi)} \left[\tilde{\Omega}_1\varepsilon + k_3\varepsilon^3 \right] (b-r\cos\chi)^3 r \, dr \, d\chi + \right. \\ &\quad \left. \tilde{\Omega}_1\varepsilon^3 \int_0^{2\pi} [b-r_0(\chi)\cos\chi]^3 r_0(\chi)r_2(\chi) \, d\chi + O(\varepsilon^5) \right\} \\ &\equiv J_N + J_2\varepsilon^2 + J_N O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (\text{J.2})$$

mit

$$k_3 := \tilde{\Omega}_1(-6\nu_2^i - \tilde{\omega}_2^i + \tilde{p}_2 + \tilde{v}_1^2) + \tilde{\Omega}_3 \quad (\text{J.3})$$

- Gravitationsmasse (2.40)

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{2\Omega J}{c^2} + 2\pi\mu \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{ob}}(\chi)} (1 + 3\tilde{p})e^{\nu^i + 2\psi^i + \lambda^i} (b - r \cos \chi) r \, dr \, d\chi \\
 &= \frac{2\Omega_N J_N}{c^2} + M_N O(\varepsilon^4) + \\
 &\quad 2\pi\mu \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\chi) + r_2(\chi)\varepsilon^2} [1 + (3\tilde{p}_2 - 2\nu_2^i)\varepsilon^2] (b - r \cos \chi) r \, dr \, d\chi \\
 &= \frac{4\pi\mu\tilde{\Omega}_1^2\varepsilon^2}{b^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\chi)} (b - r \cos \chi)^3 r \, dr \, d\chi + \\
 &\quad 2\pi\mu \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\chi)} [1 + \varepsilon^2(3\tilde{p}_2 - 2\nu_2^i)] (b - r \cos \chi) r \, dr \, d\chi + \\
 &\quad 2\pi\mu\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} [b - r_0(\chi) \cos \chi] r_0(\chi) r_2(\chi) \, d\chi + M_N O(\varepsilon^4) \\
 &\equiv M_N + M_2\varepsilon^2 + M_N O(\varepsilon^4)
 \end{aligned} \tag{J.4}$$

- baryonische Masse (2.42)

$$\begin{aligned}
 M_B &= 2\pi\mu \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{ob}}(\chi)} \frac{e^{\lambda^i + 2\psi^i}}{\sqrt{1 - \tilde{v}^2}} (b - r \cos \chi) r \, dr \, d\chi \\
 &= 2\pi\mu \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\chi) + r_2(\chi)\varepsilon^2} (1 + k_2\varepsilon^2) (b - r \cos \chi) r \, dr \, d\chi + M_N O(\varepsilon^4) \\
 &= 2\pi\mu \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\chi)} (1 + k_2\varepsilon^2) (b - r \cos \chi) r \, dr \, d\chi + \\
 &\quad 2\pi\mu\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} [b - r_0(\chi) \cos \chi] r_0(\chi) r_2(\chi) \, d\chi + M_N O(\varepsilon^4) \\
 &\equiv M_N + M_{B2}\varepsilon^2 + M_N O(\varepsilon^4),
 \end{aligned} \tag{J.5}$$

mit

$$k_2 := \frac{\tilde{\Omega}_1^2}{2} \left(1 - \frac{r \cos \chi}{b}\right)^2 - 3\nu_2^i \tag{J.6}$$

- Rotverschiebung

$$Z_0 = \gamma_2\varepsilon^2 + (\gamma_4 + \gamma_2^2)\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6). \tag{J.7}$$

- Radienverhältnis

$$A = \frac{b - r_{\text{ob}}(\chi = 0)}{b + r_{\text{ob}}(\chi = \pi)} = \frac{b - r_0(\chi = 0) - r_2(\chi = 0)\varepsilon^2}{b + r_0(\chi = \pi) + r_2(\chi = \pi)\varepsilon^2} + O(\varepsilon^4). \tag{J.8}$$

Mit den Formeln für die baryonische Masse und die Gravitationsmasse lassen sich explizit einige Aussagen überprüfen, die im Anhang G für beliebige Gleichgewichtsfiguren hergeleitet wurden: Wie erwartet reduzieren sich beide Massen in führender Ordnung auf die Newtonsche Masse (1.41). Darüber hinaus heben sich im führenden Term der Differenz der relativistischen Massen die beiden identischen Integrale, die die Korrektur zur Newtonschen Oberfläche (r_2) beinhalten, weg.¹ Für die Bindungsenergie (2.43) folgt

$$\begin{aligned}
E_b &= 2\pi\mu\varepsilon^2c^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\chi)} \left(-\nu_2^i - 3\tilde{p}_2 - \frac{3\tilde{v}_1^2}{2} \right) (b - r \cos \chi) r \, dr \, d\chi + M_N c^2 O(\varepsilon^4) \\
&= - \int \left(\mu U_N + 3p_N + \frac{3\mu v_N^2}{2} \right) d^3x + M_N c^2 O(\varepsilon^4) \\
&= -(2W + 3P + 3T) + M_N c^2 O(\varepsilon^4).
\end{aligned} \tag{J.9}$$

Mithilfe der Virialidentität (1.47) folgt in erster post-Newtonscher Ordnung

$$E_b^{1\text{pN}} = -(T + W), \tag{J.10}$$

was mit der allgemein gültigen Formel (G.10) übereinstimmt (hier ist $\mathcal{U} = 0$).

Abschließend noch ein paar technische Details, die von Bedeutung sein können, wenn jemand die genauen Zahlenwerte reproduzieren möchte: Im Kapitel 1 wurde stets mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit gearbeitet, siehe (1.24) und beispielsweise Tab. 1.1. Es ist daher nicht selbstverständlich, was unter der Winkelgeschwindigkeit in erster post-Newtonscher Ordnung und q -ter Ordnung in σ gemeint sein soll. Man kann beim Newtonschen Anteil einfach die Wurzel der entsprechenden Reihe für Ω_N^2 ziehen, oder diese Wurzel zusätzlich bis zur gewünschten Ordnung in σ entwickeln. Auf die zusätzliche Entwicklung in σ wurde verzichtet. Weiterhin wird genau der Ausdruck (J.8) in der Arbeit verwendet (etwa zur Erstellung der Tabelle 2.1), wenn das Radienverhältnis in erster post-Newtonscher Näherung benötigt wird. Alternativ könnte man den Quotienten in ε entwickeln und nur die ersten beiden Glieder (ε^0 und ε^2) mitnehmen. Die resultierenden Unterschiede sind von höherer Ordnung in ε . Darüber hinaus entwickelt man diese Formel auch nicht nach σ , sondern verwendet für $r_0(\chi)$ und $r_2(\chi)$ einfach die Reihen bis zur gewünschten Ordnung in σ . Bei den übrigen Größen wurde der Newtonsche und post-Newtonsche Anteil stets bis zur gewünschten Ordnung in σ entwickelt, und höhere Glieder konsequent vernachlässigt.

¹Diese Integrale sind der Grund, warum sich allein aus den Newtonschen Größen weder die baryonische Masse noch die Gravitationsmasse, in erster post-Newtonscher Ordnung berechnen lässt, wenngleich dies für Differenz möglich ist.

Eigene Publikationen und Vorträge

Publikationen

- [FHA05] T. Fischer, S. Horatschek und M. Ansorg. Uniformly rotating rings in general relativity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 364:943, 2005.
- [HP09] S. Horatschek und D. Petroff. A Roche model for uniformly rotating rings. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 392:1211, 2009.
- [PH08] D. Petroff und S. Horatschek. Uniformly rotating homogeneous and polytropic rings in Newtonian gravity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 389:156, 2008.

Vorträge

- *A Roche Model for Uniformly Rotating Rings*, David Petroff und Stefan Horatschek, Video-Seminar des SFB/TR7 „Gravitationswellenastronomie: Methoden - Quellen - Beobachtungen“, 4.5.2009
- *Rotierende Flüssigkeitsringe*, Stefan Horatschek und David Petroff, DGP Frühjahrstagung, München, 10.3.2009
- *Homogeneous and Polytropic Rings in Newtonian Gravity*, Stefan Horatschek und David Petroff, Seminar Gravitationstheorie, TPI, FSU Jena, 11.1.2008
- *Uniformly Rotating Rings in General Relativity*, Stefan Horatschek, Video-Seminar des SFB/TR7 „Gravitationswellenastronomie: Methoden - Quellen - Beobachtungen“, 4.7.2005
- *Rotierende Ringe in der allgemeinen Relativitätstheorie*, Stefan Horatschek, Marcus Ansorg und Thomas Fischer, DPG Jahrestagung, Berlin, 5.3.2005
- *Relativistic Rings*, Stefan Horatschek und Thomas Fischer, Institutsseminar, TPI, FSU Jena, 12.5.2004

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder andere Personen) in Anspruch genommen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die geltende Promotionsordnung der Physikalisch-Astronomischen Fakultät ist mir bekannt.

Ich versichere ehrenwörtlich, dass ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Jena, den 30. September 2009

Stefan Horatschek

Danksagung

Während der mehrjährigen Arbeit an meiner Dissertation haben mich eine Reihe von Menschen sowohl in fachlicher wie auch in persönlicher Hinsicht unterstützt. Ihnen möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

Für seine ausgezeichnete wissenschaftliche Betreuung möchte ich meinem Doktorvater Prof. Reinhard Meinel danken. Er nahm sich stets Zeit, mit mir über meine Arbeit zu diskutieren, und trug durch seine Anregungen und Rückmeldungen zur stetigen Weiterentwicklung bei. Ein besonderer Dank gilt außerdem meinem Kollegen und Zimmergenossen David Petroff. Die gemeinsame Arbeit an verschiedenen Veröffentlichungen und die Möglichkeit, mit ihm jederzeit fachlich diskutieren zu können, habe ich als äußerst angenehm und produktiv empfunden. Mein Dank gilt weiterhin Prof. Gernot Neugebauer und Marcus Ansorg. Beide haben mir wertvolle fachliche Anregungen geliefert. Bei Andreas Kleinwächter sowie der gesamten Arbeitsgruppe am Theoretisch-Physikalischen Institut bedanke ich mich für die kollegiale Atmosphäre. Bei Yoshiharu Eriguchi und Jeremiah Ostriker möchte ich mich für ihre nützlichen Hinweise zu meinen Veröffentlichungen bedanken. Für ihre Bereitschaft zur Begutachtung meiner Dissertation danke ich den Professoren Hubert Goenner, Wilhelm Kley und Gernot Neugebauer.

Thomas Fischer danke ich für seine kompetente Hilfe bei allen typographischen und technischen Fragen zu \LaTeX und MetaPost. Ein herzlicher Dank gilt außerdem Jan Richter für sein aufmerksames Korrekturlesen.

Nicht zuletzt möchte ich mich ganz herzlich bei meinen Eltern Gerda und Martin Horatschek für ihre Unterstützung, ihr Interesse an meiner Arbeit und ihr Vertrauen in mich bedanken. Meiner Lebensgefährtin Katherina Wicklein danke ich für ihre Liebe und unsere wunderbaren Kinder.

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name Stefan Horatschek
geboren am 7. Januar 1980 in Jena

Ausbildungsdaten

1986 – 1991 Polytechnische Oberschule „Magnus Poser“
1991 – 1992 6. Gymnasium Jena
1992 – 1998 Carl-Zeiss-Gymnasium, mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer
 Spezialschulteil, Abschluss: Abitur mit Note 1,0
1998 – 2004 Physikstudium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
 2000 Diplom-Vorprüfungen: Gesamtnote sehr gut
 2004 Physik-Diplom (mit Auszeichnung)
seit 2004 Promotion an der Friedrich-Schiller-Universität Jena